Studia Psychologiczne. t. 57 (2019), z. 2, s. 3–12
PL ISSN 0081-685X
DOI: 10.2478/V1067-010-0181-9

Sylwia Kania

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski

sylwia.kania@us.edu.pl

PEWNE TRUDNOŚCI W RELACJACH MIĘDZY NAUCZYCIELEM A UCZNIEM W KONTEKŚCIE ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ TEKSTOWYCH

Operatywne stosowanie narzędzi matematycznych do opisu sytuacji przedstawionej w rozpatrywanym problemie jest kluczową umiejętnością pozwalającą na prawidłowy rozwój matematyczny ucznia. Prawidłowa analiza zadania, zrozumienie problemu, zastanowienie się nad sposobem rozwiązania, wykonanie zaplanowanych czynności i w końcu spojrzenie na zadanie w sposób całościowy, stanowią fundament rozumowania, które prowadzi do abstrakcyjnego pojmowania rozważanych treści. Polyowska metoda rozwiązywania zadań tekstowych, modyfikowana ze względu na cyfryzację rzeczywistości, jest w dalszym ciągu podstawą pracy nauczyciela z uczniem.

W publikacji skupię się na metodach rozwiązania wybranych zadań maturalnych, przedstawię drogę, którą nauczyciel powinien przejść ze swoimi uczniami podczas analizy rozpatrywanego problemu. Zwrócę również uwagę na trudności, jakie pojawiają się na tej drodze, na nieporozumienia, które stanowią istotną przeszkodę w komunikacji na lekcji, a także w ogólnej relacji nauczyciel – uczeń.

Słowa kluczowe: Proces nauczania matematyki, rozwiązywanie zadań tekstowych

W obecnych czasach komunikacja interpersonalna sprowadza się głównie do przekazów teleinformatycznych. Od wielu lat mówi się głośno o cyfryzacji rzeczywistości, o wirtualnym społeczeństwie. Nauczyciele narzekają, że uczniowie coraz gorzej radzą sobie z wypowiedziami ustnymi, coraz słabiej rozumieją czytany tekst. Młodzież, przyzwyczajona do zdawkowych informacji, skrótów myślowych i ciągłych bodźców emocjonalnych dostarczanych przez wirtualną komunikację, nie potrafi skupić się nad czytanym w tradycyjnej, drukowanej formie tekstem – długim, jednostajnym, często monotonnym. Cały proces cyfryzacji zaczął się jednak dawno temu i mimo, że wciąż się pogłębia, to obecni „młodzi dorośli" są już pokoleniem cyfrowym, dla których tekst pisany, drukowany jest mniej bliski niż tekst wyświetlany na ekranie smartfona czy tabletu. Ci „młodzi dorośli" to dzisiaj między innymi nauczyciele, których zadaniem jest wyposażenie uczniów w podstawy szeroko rozumianej matematycznej wiedzy. Kształcenie szkolne wiąże się ściśle z werbalną komunikacją na lekcjach matematyki, z jasnym i pełnym przekazem, a co za tym idzie – ze stosowaniem poprawnego, ścisłego języka matematycznego. Należy więc zwrócić szczególną uwagę na proces komunikacji na lekcjach matematyki u tych młodych nauczycieli, a także na formy przekazu informacji u studentów kierunków nauczycielskich. Rolą i powinnością nauczyciela jest wyposażenie uczniów w umiejętność operatywnego stosowania narzędzi matematycznych do opisu sytuacji przedstawionych w rozpatrywanych problemach.

Prawidłowa analiza zadania, zrozumienie problemu, zastanowienie się nad sposobem rozwiązania, wykonanie zaplanowanych czynności i w końcu spojrzenie na zadanie w sposób całościowy, stanowią fundament rozumowania, które prowadzi do abstrakcyjnego pojmowania rozważanych treści. Rozwiązywanie zadań tekstowych lub zadań „na dowodzenie" wymaga dużej dozy energii, poświęcenia i skupienia. Dzięki rozwiązywaniu tego typu zadań nauczyciele mogą rozbudzać kreatywność uczniów, mogą jednak tym samym szybko i skutecznie gasić uczniowski zapał przez własny sceptycyzm, rutynowe operacje i dobieranie niepoprawnych form i metod pracy.

George Polya twierdził, że celem nauczania matematyki w szkole średniej powinno być nauczanie myślenia (Polya, 1965), a owe myślenie utożsamiał z rozwiązywaniem zadań tekstowych. Kwestia rozwiązywania zadań tekstowych i nauczania matematyki w tym zakresie dzieli się na dwa okresy – przed i po Polyi (Schoenfeld, 1987). System edukacji w Polsce stoi w obliczu wielkich zmian, zarówno w kontekście struktury systemu edukacji, jak również treści programowych i to właśnie sposoby rozumowania, argumentowania i myślenia matematycznego będą kluczową umiejętnością, w którą każdy nauczyciel będzie musiał wyposażyć swoich uczniów. Dlatego też sposoby i techniki rozwiązywania zadań tekstowych, a w zasadzie sposoby i techniki w jaki sposób uczyć rozwiązywania zadań tekstowych powinny stać się niezbędnym narzędziem pracy w warsztacie nauczyciela.

Pierwsza zasada polyowskiej metodyki – Zrozumienie zadania, jest tak oczywista, że bardzo często nauczyciele pomijają ten etap analizy zadania. Niezrozumienie treści rozważanego problemu, częściowe lub ogólne, jest niestety źródłem niepowodzeń uczniowskich podczas pracy nad zadaniem. W książce *Jak to rozwiązać?* Polya przedstawia listę przykładowych pytań i podpowiedzi, które mogą pomóc nauczycielowi przejść przez pierwszą fazę rozwiązywania zadań tekstowych:

Czy rozumiesz wszystkie sformułowania w rozważanym zadaniu? Co masz zrobić/ pokazać/ udowodnić? Czy potrafisz wypowiedzieć treść zadania i postawiony problem własnymi słowami? Co jest niewiadome, co jest dane? Jaki jest warunek? Zrób rysunek, wprowadź oznaczenia (Polya, 1945).

Dialog nauczyciela z uczniami powinien bezpośrednio wprowadzać w drugą zasadę metodyki rozwiązywania zadań tekstowych – Układanie planu rozwiązania. Niemalże każde zadanie można rozwiązać na kilka sposobów i wybranie odpowiedniej drogi postępowania ma zasadnicze znaczenie. Nauczyciel powinien omówić z uczniami tę drogę, wskazać każdy krok, który należy wykonać tak, by po tej dyskusji uczniowie potrafili samodzielnie określić kierunek działań. Umiejętność dobierania strategii można zdobyć jedynie poprzez rozwiązywanie dostatecznie dużej liczby zadań, potrafimy wówczas dostrzec pewne analogie, użyć podobnych metod dedukcyjnych, gdy rozwiązywaliśmy podobne zadanie wcześniej, łatwiej nam wykorzystać własne doświadczenie, jeśli doszliśmy do podobnych wniosków wcześniej.

Wykonanie planu – trzecia zasada rozwiązywania zadań tekstowych – jest zazwyczaj łatwiejsza niż poprzednia. Jeśli uczniowie zrozumieli wcześniej zadanie i ułożyli dokładną strategię postępowania przy jego rozwiązaniu, nauczyciel może polegać na ich umiejętnościach wykonania postawionych zadań. Uczniowie powinni być wytrwali w realizacji planu rozwiązania, a jeśli ten zawodzi, powinni próbować ułożyć następny plan unikając w ten sposób bezcelowych obliczeń.

Ostatnią zasadą polyowskiej metodyki jest Rzut oka wstecz. Ten krok jest bardzo często pomijany, nie tylko przez uczniów, ale także przez nauczycieli. Opuszczana jest wówczas bardzo pouczająca faza szerokiego spojrzenia na postawiony problem. Poświęcenie czasu na przeanalizowanie, co było dobre, a co nie działało pomoże w pewnym stopniu przewidywać strategie podczas rozwiązywania zadań w przyszłości.

Powszechnie panuje opinia, że matematyka jest bardzo trudnym przedmiotem szkolnym, a przyczyn tego stwierdzenia można doszukiwać w abstrakcyjności matematycznych rozumowań i dedukcyjnej strukturze. Problem rozwiązywania zadań tekstowych był przedmiotem zainteresowań wielu dydaktyków matematyki, skupiali się oni głównie na uczniach szkoły podstawowej (m.in. Ciosek 1978, Legutko 1989, Siwek 1984, Treliński 1984). Metody i strategie rozwiązywania zadań tekstowych dla starszych uczniów pozostają takie same, uczniowie powinni mieć już wyrobione właściwe nawyki, jednak rzeczywistość w przypadku szkoły średniej pokazuje, że jest to błędne założenie. Istnieje wiele przyczyn pojawiających się trudności podczas rozwiązywania zadań tekstowych, takie jak słaba umiejętność czytania, rozumienia i analizy problemu. Uczniowie nie potrafią wykorzystywać wcześniej zdobytej wiedzy i nie są w stanie dostrzegać pojawiających się analogii, a powodem takiego stanu rzeczy może być czasami niewystraczająca wiedza merytoryczna w zakresie przedmiotu ale bardzo często uczniowie po prostu nie potrafią wybrać odpowiedniej strategii i obrać właściwego toku rozumowania.

Każde zadanie tekstowe składa się z dwóch warstw i wymaga różnych aktywności matematycznych. Pierwszą warstwą jest tekst werbalny, który przedstawia pewną sytuacją empiryczną, prawdziwą bądź wyobrażoną, którą czytelnik musi zrozumieć i dokonać poprawnej analizy problemu, Prowadzi to bezpośrednio do drugiego etapu – warstwy matematycznej, która wymaga abstrakcyjnych aktywności związanych z właściwym przekształceniem informacji zawartych w warstwie werbalnej w matematyczny problem do rozwiązania. Rozwiązywanie zadań wymaga formułowania matematycznych wypowiedzi uwzględniających precyzyjny język matematyczny i jednoznaczność używanych pojęć. Stosowanie odpowiedniej terminologii wymusza zauważenie każdego niezbędnego szczegółu, stąd transfer warstwy werbalnej w matematyczną jest trudnym i złożonym procesem i nie zawsze uczniowie są do tego przygotowani. Metodyka rozwiązywania zadań tekstowych powinna być stosowana bardzo dokładnie i systematycznie, ponieważ taka forma nauczania – uczenia się matematyki prowadzi do dogłębnego rozumienia rozważanych treści i pozyskiwania nowych umiejętności. Co więcej, pomaga zrozumieć pewne metody matematycznych rozumowań, między innymi sens uogólniania czy stosowania analogii.

CHARAKTERYSTYKA EKSPERYMENTU CASE – STUDY

W niniejszym artykule przedstawiona zostanie pewna koncepcja sprawdzenia poprawności stosowania metodyki rozwiązywania zadań tekstowych. Przedstawione wyniki nie są generalizowane, są przypadkami pewnego case-study, jednak wyznaczają zarys szerszego spojrzenia na analizę skuteczności nauczania rozwiązywania zadań tekstowych. W artykule będę posługiwać się określeniem „badania", należy jednak pamiętać, że chodzi tu jedynie o przeprowadzoną kontrolę i obserwacje procesu dydaktycznego.

Do badań zostali wybrani studenci matematyki II roku studiów I stopnia o specjalności nauczycielskiej. Studenci na zajęciach z podstaw dydaktyki zostali szczegółowo zapoznani z polyowską metodyką rozwiązywania zadań tekstowych, omówione zostały liczne przykłady jej zastosowania, a badani zostali uwrażliwieni na wagę i znaczenie zadawanych pytań i rolę dogłębnej analizy problemu przed przystąpieniem do rozwiązywania problemu, czyli wykonania wcześniej sprecyzowanego i przemyślanego planu. Ponadto, badani studenci mieli pewne doświadczenia związane z pracą z uczniami, prowadzeniem lekcji matematyki, gdyż jednocześnie odbywali praktykę śródroczną w szkole podstawowej. Studenci prowadzili lekcje w szkole ćwiczeń, a następnie przeprowadzone przez nich zajęcia poddawane były dokładnej analizie pod względem poprawności merytorycznej, stylistycznej, jak również wychowawczej. Badana grupa studentów liczyła 8 osób.

Eksperyment polegał na rozwiązaniu przez studentów otrzymanych zadań tekstowych na tablicy pracując z resztą grupy tak, jak z uczniami w szkole, uwzględniając polyowską metodykę rozwiązywania zadań tekstowych. Studenci otrzymali zadania wcześniej, mieli czas na samodzielne ich rozwiązanie, ułożenie konspektu pracy „pod tablicą", pracy „z klasą". Każdy student znał tylko swoje zadania, nikt nie wiedział, jakie zadania mają koledzy i koleżanki. Opisywana koncepcja miała być pewnego rodzaju kontrolą przyswojenia treści programowych, jednak wyniki tej kontroli oraz obserwacje prowadzone podczas tego eksperymentu stały się na tyle ciekawe i zaskakujące, że wyłoniły pewien kierunek badań, które mogą zostać przeprowadzone na szerszą skalę, a wnioski, które powstaną po ich analizie mogą nabrać znaczenia w kontekście nauczania rozwiązywania zadań tekstowych.

PREZENTACJA ZADAŃ

W niniejszym artykule zostaną przedstawione i szczegółowo omówione dwa zadania, na podstawie których sformułowane zostaną pewne hipotezy i wskazania do dalszych badań. Zadania pochodzą z egzaminu maturalnego z matematyki w 2018 roku – jedno zadanie z zakresu podstawowego, drugie z zakresu rozszerzonego. Obydwa zadania należą do V standardu wymagań ogólnych zawartych w podstawie programowej kształcenia ogólnego, mianowicie – Rozumowanie i argumentacja. Od ucznia na poziomie podstawowym wymaga się tutaj umiejętności prowadzenia prostego rozumowania, składającego się z niewielkiej liczby kroków. Rozważane w niniejszej pracy zadanie redukuje się do znajomości wzorów skróconego mnożenia na kwadrat różnicy i podstawowych znajomości przekształcania wyrażeń wymiernych. W zakresie rozszerzonym wymaga się od ucznia umiejętności tworzenia łańcucha argumentów i uzasadniania jego poprawności. Przedstawione zadanie dotyczy podzielności liczb i wymusza znajomość podstawowych własności liczb rzeczywistych oraz umiejętność rozkładu wielomianu na czynniki.

Poniżej prezentuję treści zadań wraz z przykładowymi rozwiązaniami:

Zadanie 1 (Zadanie 28, CKE maj 2018, zakres podstawowy)
Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich *a*, *b* prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\geq\frac{2}{a+b}.$$

Przykładowe rozwiązanie:
Ponieważ liczby a, b są dodatnie, więc $2a>0,\ 2b>0,\ a+b>0$. Mnożąc obie strony rozważanej nierówności przez $2a,\ 2b,\ a+b$, otrzymujemy

$$2b\left(a+b\right)+2a\left(a+b\right)\geq 2\cdot 2a\cdot 2b$$
$$2ab+2b^2+2a^2+2ab-8ab\geq 0$$
$$2a^2-4ab+2b^2\geq 0.$$
$$2\left(a-b\right)^2\geq 0.$$

Powyższa nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb *a*, *b*, więc w szczególności również dla liczb dodatnich. To kończy dowód.

Zadanie 2 (Zadanie 8, CKE maj 2018, zakres rozszerzony)
Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej *k* i dla każdej liczby całkowitej *m* liczba k^3m-km^3 jest podzielna przez 6.

Przykładowe rozwiązania:
I sposób: Zauważmy, że

$$k^3m-km^3=km\left(k^2-m^2\right)=km\left(k-m\right)\left(k+m\right).$$

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów: uzasadnienia podzielności przez 2 oraz podzielności przez 3.

Podzielność przez 2: Jeżeli którakolwiek z liczb *k,m,* jest parzysta, to iloczyn *km* jest parzysty, więc całe wyrażenie $km\left(k^2-m^2\right)$ jest parzyste. W przypadku, gdy obie liczby są nieparzyste, to ich suma *k+m* jest parzysta, więc iloczyn $km\left(k-m\right)\left(k+m\right)$ jest podzielny przez 2.

Podzielność przez 3: Rozpatrujemy cztery przypadki
1. Którakolwiek z liczb *k,m* jest podzielna przez 3. Wtedy iloczyn *km* jest podzielny przez 3, więc także całe wyrażenie $km\left(k^2-m^2\right)$.
2. Obie liczby *k,m* przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1. Wówczas liczba $\left(k-m\right)$ jest podzielna przez 3, więc iloczyn $km\left(k-m\right)\left(k+m\right)$ jest podzielny przez 3.
3. Obie liczby *k,m* przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2. Wówczas liczba $\left(k-m\right)$ jest podzielna przez 3, więc iloczyn $km\left(k-m\right)\left(k+m\right)$ jest podzielny przez 3.
4. Jedna z liczb *k,m* przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, a druga przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2. Wtedy liczba $\left(k+m\right)$ jest podzielna przez 3, więc iloczyn $km\left(k-m\right)\left(k+m\right)$ jest podzielny przez 3.

Wykazaliśmy, że liczba k^3m-km^3 jest podzielna przez 2 i przez 3, więc jest podzielna przez 6. To kończy dowód.

II sposób: Zauważmy, że

$$\begin{aligned}k^3m-km^3&=km\left(k^2-1+1-m^2\right)\\&=km\left(k^2-1\right)-km\left(m^2-1\right)\\&=km\left(k-1\right)\left(k+1\right)-km\left(m-1\right)\left(m+1\right).\end{aligned}$$

Iloczyn $k\left(k-1\right)\left(k+1\right)$ to iloczyn trzech kolejnych liczb, więc jedna z nich jest podzielna przez 3 i co najmniej jedna z nich jest podzielna przez 2, więc iloczyn jest podzielny przez 6. Analogicznie iloczyn $m\left(m-1\right)\left(m+1\right)$ jest podzielny przez 6. Różnica dwóch liczb podzielnych przez 6 jest podzielna przez 6. To kończy dowód.

ANALIZA PRZEPROWADZONEGO CASE – STUDY

Studenci, których zadaniem było rozwiązanie powyższego zadania z grupą mieli ułożony pełen scenariusz pracy, zaplanowali przykładową listę pytań do każdego z IV etapów polyowskiej metody rozwiązywania zadań tekstowych.

1. Analiza i ocena pracy studenta z grupą podczas rozwiązywania zadania 1

Student, który rozwiązywał zadanie z grupą zaczął od szeregu pytań prowokujących dyskusję nad założeniami i tezą rozważanego dowodu. Ułożenie planu rozwiązania zredukowało się do stwierdzenia, że należy tutaj wykonać szereg przekształceń, by doprowadzić do pewnej nierówności tożsamościowej. Przyszły nauczyciel kierował tokiem myśli grupy, kontrolował przebieg dyskusji i czuwał nad jej poprawnością. Dopiero w momencie wykonywania przygotowanego planu rozwiązania, a więc dokonywania konkretnych przekształceń pojawiły się niepokojące sygnały o zawodności metody rozwiązania przez studenta, a raczej o niezrozumieniu idei dowodu przez jego uczniów. Wychodząc od tezy rozważanego problemu, a więc nierówności $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\geq\frac{2}{a+b}$, nauczyciel zapytał:

– *Jakie będzie nasze pierwsze przekształcenie?*
Uczeń odpowiedział: – *Możemy sprowadzić lewą stronę do wspólnego mianownika;* Inny dodał: – *Sprowadźmy od razu wszystko do wspólnego mianownika, będzie łatwiej (…)*

Nauczyciel, zamiast podsumować powstałą wymianę zdań komentarzem na temat braku "najłatwiejszego" przekształcenia, na temat indywidualnych preferencji i różnych dróg wyboru, dodał:

– *Najłatwiej to będzie od razu pozbyć się mianowników. W jaki sposób to zrobimy?*

Student nie dał swoim uczniom możliwości wyboru, nie pozwolił na refleksję nad własnym pomysłem, a nawet nie potwierdził słusznych i prawidłowych propozycji uczniów. Takie sytuacje nie powinny pojawiać się na lekcjach matematyki, w szczególności podczas rozwiązywania zadań na dowodzenie. Uczniowie boją się tego typu zadań, odczuwają strach przed niepoprawnymi pomysłami, czują się niepewnie obawiając porażki. **Nauczyciel, który nie docenia starań uczniów, nie zachęca ich do aktywnego odkrywania pewnych praw i zasad, jedynie pogłębia ich lęk przed kompromitacją i zabija przejawy wszelkiej twórczości.** Omawiana sytuacja jest dodatkowo tym gorsza, że nauczyciel zlekceważył pomysły uczniów, mimo, że obydwa były prawidłowe. Student powinien się odnieść do sugerowanych propozycji, nawet, jeśli założył rozwiązanie zadania inną metodą . Wystarczyłby komentarz typu: - *Możemy lewą stronę sprowadzić do wspólnego mianownika, możemy też od razu sprowadzić całość do wspólnego mianownika. Oba pomysły są dobre i prowadzą finalnie do tego samego rezultatu. Jakiego?* Nastąpiłaby kolejna wymiana zdań, mniej lub bardziej sterowana przez nauczyciela, jednak bardzo pouczająca i kształcąca twórczą postawę uczniów. Student po takiej dyskusji powinien pozwolić uczniom dokonywać przekształceń według własnych pomysłów dodając, że na tablicy trzeba wybrać jedną metodę rozwiązania i on decyduje się na pozbycie się mianowników w pierwszym przekształceniu. Nauczyciel powinien kontrolować przebieg tych przekształceń u uczniów, którzy wybierają inną drogę postępowania zwracając uwagę, że docelowo powinniśmy otrzymać nierówność tożsamościową. Podczas omawiania zajęć po przeprowadzonej „lekcji" przez studenta, ten, zapytany o powody takiego postępowania uznał, że wszystko było tak oczywiste, że żaden komentarz potwierdzający wypowiedziane propozycje nie był konieczny. **Nauczyciel, który nie rozumie roli i wagi dojścia do rozwiązania pewnego problemu drogą wybraną na skutek własnego pomysłu, nie jest w stanie rozwinąć twórczej postawy uczniów i pobudzić ich umysły do coraz śmielszych działań.** Nauczyciel powinien wręcz czasem przesadnie doceniać zaangażowanie uczniów podczas rozwiązywania zadań na dowodzenie, by pozostawić ich w przekonaniu, że przynajmniej do części rozwiązania doszli samodzielnie jeżeli nawet rozwiązanie było całościowo sterowane i narzucone przez nauczyciela.

Ponadto, pozbywając się mianowników (dokonując przekształceń którymkolwiek sposobem), czyli mnożąc przez te mianowniki, korzystamy z założeń podanych w treści zadania. Rozwiązując z uczniami zadania na dowodzenie nauczyciel powinien zwracać szczególną uwagę na momenty, w których korzystamy z założeń po to, by zapoznać uczniów z ogólną ideą dowodzenia, z potrzebą uzasadniania i świadomością poprawności wykonywanych czynności. Student co prawda zwrócił uwagę na fakt, że mnożymy obustronnie przez liczby dodatnie, więc nie musimy martwić się o znak, jednak komentarz wydawał się bardzo blady i mało znaczący na tle wykonywanych przekształceń.

Doprowadzając przekształcaną nierówność do nierówności tożsamościowej $2\left(a-b\right)^2 \geq 0$, student podsumował dotychczasowe rozważania jednym zdaniem:

– *Otrzymaliśmy nierówność, która jest spełniona zawsze, więc to koniec dowodu.*

Czwarta zasada polyowskiej metody rozwiązania zadań tekstowych została w zasadzie pominięta, a podczas omawiania zajęć student potwierdził, że zrobił to świadomie, że w „takim zadaniu" nie ma o czym rozmawiać, rzut oka wstecz jest w zasadzie zbędny. Jest to bardzo mylny pogląd i daje niestety obraz niedojrzałości umysłu przyszłego nauczyciela do pracy z niedoświadczoną matematycznie, aczkolwiek bardzo chłonną młodzieżą. Każde zadanie na dowodzenie powinno być bardzo dokładnie omówione ponownie po przeprowadzonym rozumowaniu. To jest właśnie moment na ukazywanie sposobów rozumowania, na zestawienie dedukcyjnych i redukcyjnych metod uzasadniania, na omówienie potrzeby sprawdzania każdego kroku, na zwrócenie uwagi na porządek i poprawność całego zapisu. **Nauczyciel powinien wykształcić w uczniach potrzebę uzasadniania własnych myśli i nauczyć sposobów argumentowania i rozumowania dowodowego.**

Dyskusja z grupą studentów po rozwiązaniu i omówieniu rozważanego zadania była bardzo kształcąca i spowodowała nowe spojrzenie niektórych studentów na ideę i sens dowodzenia w nauczaniu szkolnym. Studenci, przyzwyczajeni do ciągłego dowodzenia, traktują uzasadnianie jako coś zupełnie naturalnego, niezbędnego, a wręcz mechanicznego. Z tego powodu zapominają, że dowodzenie dla ucznia szkoły średniej jest zupełnie nową umiejętnością, której muszą się nauczyć, którą muszą zrozumieć, by potrafili samodzielnie nią zarządzać.

2. Analiza i ocena pracy studenta z grupą podczas rozwiązywania zadania 2

Podczas pracy nad zadaniem 2 nauczyciel może oczekiwać od swoich uczniów więcej zaangażowania, dyskusja powinna być bardziej rzeczowa, a wiedza uczniów pełniejsza i precyzyjniej usystematyzowana, gdyż uczniowie realizują matematykę w zakresie rozszerzonym. Oczywiście język nauczyciela powinien być dostosowany do poziomu intelektualnego odbiorców, jednak zważywszy na dużą liczbę godzin matematyki w cyklu kształcenia i bardziej szczegółowy zakres materiału, uczniowie z założenia winni przejawiać większe zainteresowanie przedmiotem i reprezentować wyższy poziom wiedzy niż uczniowie realizujący matematykę tylko na poziomie podstawowym. Student, który przygotowywał się do pracy z tym zadaniem przedstawił opisane wcześniej dwa sposoby rozwiązania. Przyszły nauczyciel podczas wstępnego omawiania konspektu przyznał, że było mu bardzo ciężko przygotować się do tej pracy, że rozwiązując to zadanie posiłkował się gotowymi rozwiązaniami i będzie sprawiało mu trudność omawianie go z grupą uczniów. Wniosek, który nasuwa się bezpośrednio po przeprowadzonej rozmowie jest bardzo prozaiczny – studenci matematyki specjalności nauczycielskiej rozwiązują zbyt mało zadań, z którymi później będą musieli sobie radzić w pracy zawodowej. Kończąc studia matematyczne młodzi nauczyciele są mocno przyzwyczajeni do odtwórczej pracy, powodem są wszystkie egzaminy teoretyczne, z którymi musieli się zmierzyć w trakcie studiowania. Ma to duże znaczenie w początkowej działalności młodego nauczyciela, gdyż w momencie napotkania jakichś trudności podczas rozwiązywania zadania, student odruchowo sięga po gotowe rozwiązania, zamiast podjąć drogę wymagającą wszelkich aktywności matematycznych prowadzących do skutecznego, samodzielnego rozwiązania problemu. Nauczyciel, który tak postępuje nie będzie w stanie wskazać tej drogi również swoim uczniom, przejść jej razem z nimi, a co najważniejsze – wpajać im metody odnajdywania takich dróg.

Kolejnym niepokojącym sygnałem było pytanie studenta, czy może od razu „przejść" do omawiania sposobu rozwiązania II metodą, gdyż wypisywanie i omawianie tych wszystkich przypadków według I metody jest żmudne i czasochłonne. Na pytanie: *Czy tak właśnie rozpoczął Pan pracę nad tym zadaniem? Czy to była pierwsza myśl, pierwszy pomysł na rozwiązanie?* Student odpowiedział: *Oczywiście, że nie, zacząłem rozkładać wielomian i rozważać przypadki (…)* Student nie zdawał sobie sprawy z błędu dydaktycznego, który zamierzał popełnić – widział pozorną trudność (zawiłe i czasochłonne wypisywanie przypadków), więc nie chciał się w to „zagłębiać" z uczniami. Taka postawa nauczyciela w klasie jest nie do przyjęcia. **Gdyby student zaczął sprowadzać rozważane zadanie do rozwiązania tylko II metodą, cała analiza problemu i cała droga do otrzymania pożądanego wyniku byłaby sztuczna i pobudziła w uczniach poczucie bezradności w obliczu problemu, nieumiejętność radzenia sobie z sytuacją przedstawioną w zadaniu.** Uczniowie oczywiście zrozumieliby metodę i sposób rozwiązania, ale brak obycia w danym zakresie, zbyt małe doświadczenie w stosowaniu matematycznych „sztuczek" i nietypowych sposobach rozumowania podważyłaby ich pewność siebie i wiarę we własne możliwości, a może nawet zniechęciłaby ich do dalszej pracy. Uczeń musi mieć świadomość, że do rozwiązania dochodzi sam, że nawet bez pomocy nauczyciela potrafiłby w jakiś sposób rozwiązać zadanie, przynajmniej częściowo. Obowiązkiem nauczyciela jest tak sterować uczniem, właśnie poprzez zadawanie odpowiednich pytań, że zostawia go z poczuciem spełnienia w zakresie danego problemu, że uczeń pozostaje w przeświadczeniu, że doszedł do rozwiązania sam.

Po głębokiej analizie dydaktycznej wartości i struktury rozważanego zadania, student zrozumiał wagę i rolę dojścia do rozwiązania I metodą. W trakcie zajęć rozpoczął omawianie zadania z grupą studentów, poprawnie uwzględniając polyowską metodykę podejścia do problemu, stosując odpowiednią gradację pytań w zależności od reakcji grupy. Wszystkie etapy pracy z grupą zostały uprzednio dokładnie omówione z prowadzącym eksperyment. Student rozpoczął pracę z grupą od omówienia zadania: - *Czego dotyczy dane zadanie? Co to znaczy, że liczba jest podzielna przez 6? Patrząc na dane wyrażenie, co nasuwa się jako pierwsze?* Dyskusja, w sposób prawidłowy kierowana przez prowadzącego doprowadziła do rozłożenia danego wielomianu na czynniki oraz ułożeniu planu działania – uzasadnienia podzielności przez 2 i 3:

– *W jaki sposób pokażemy, że dane wyrażenie jest podzielne przez 2?*

– *Rozpatrzymy przypadki. Najpierw, że m i n są parzyste, potem, że m parzyste, a n nieparzyste, potem na odwrót i na końcu, że obie nieparzyste.*

– *Dobrze, ale tu wystarczy pokazać przypadki, że którakolwiek z liczb m i n jest parzysta lub obie są nieparzyste (…)*

Powyższy komentarz **pozbawił uczniów bardzo pouczającej analizy danego problemu, mianowicie zauważenia analogii** w przypadkach, gdy jedna z liczb jest parzysta a druga nieparzysta. Uczniowie na pewno doszliby do tego samodzielnie podczas uzasadniania przypadków, wtedy nastąpiłby **bardzo kształcący element lekcji – modyfikacja własnego pomysłu, usprawnienie go, ulepszenie – działania, które wykonane samodzielnie budują poczucie własnej wartości matematycznej danego**

ucznia, które cieszą i najbardziej rozwijają. Nauczyciel powinien dążyć do takich sytuacji, a nie świadomie z nich rezygnować, bo zajęłoby to więcej czasu.

Po omówieniu i uzasadnieniu dwóch narzuconych przez studenta przypadków zaczęto omawiać sposoby pokazania podzielności przez 3. Nauczyciel zapytał:

– *Jakie przypadki musimy rozpatrzeć, by pokazać podzielność przez 3?*

– *Dwa przypadki, że którakolwiek z liczb jest podzielna przez 3, lub że żadna nie jest. Tak jak poprzednio.*

Nauczyciel odpowiedział:

– *Ale przecież tu mogą być różne reszty, tu będzie więcej przypadków (…)*

Komentarz uczniów jednoznacznie wskazywał na niedociągnięcia pierwszej fazy zadania, na niezrozumienie istoty dowodu przez zrezygnowanie z przejścia drogi, którą uczniowie powinni przejść. Nauczyciel wybrał skrót, który dla uczniów jawił się jako sztuczny zabieg, jako przyjęty na wiarę argument, a nie krok dowodowy wyjaśniający istotę problemu. Uczniowie chcieli w kolejnym przypadku również użyć skrótu, który wcześniej okazał się poprawny. Jeśli tego typu sytuacja zdarzy się na lekcji matematyki, **nauczyciel powinien umieć wyciągać natychmiastowe wnioski, dostrzegać pojawiający się błąd, zatrzymać się przy nim i bardzo dokładnie go omówić.** Tylko w taki sposób można zapobiec tworzeniu błędnych nawyków, które później będzie bardzo trudno dostrzec, znaleźć ich przyczynę i wyeliminować.

PODSUMOWANIE

Nauczyciel, który nie potrafi w sposób poprawny analizować zadania matematycznego w klasie, nie będzie potrafił wykształcić twórczej postawy u swoich uczniów, niezbędnej na drodze matematycznego poznania. Prezentując własny tok rozumowania, choćby najbardziej zrozumiały i naukowo wartościowy, nie osiągniemy satysfakcjonujących efektów kształcenia, gdyż przekazana wiedza nie będzie trwała. Opisany w niniejszym artykule eksperyment stanowi podwaliny do pewnych badań dotyczących rozwiązywania zadań tekstowych z perspektywy przyszłego nauczyciela. Studenci, którzy brali w nich udział docenili wartość przeprowadzenia tego typu zajęć mimo, iż początkowo podchodzili do tego bardzo sceptycznie. Po rozwiązaniu swoich zadań, ułożeniu konspektów do pracy z uczniami twierdzili wręcz, że wiedzą dokładnie jak postępować i nie muszą tego sprawdzać. Planowanie kroków rozwiązania danego zadania jest niezbędne w pracy każdego nauczyciela, jednak niedoświadczeni studenci nie przypuszczają, że ich własne zachowania, ich własne komentarze i działania sprowadzają uczniów na zupełnie inne tory rozumowań, na ścieżki, które plątają drogę prawidłowych rozważań. To zadaniem nauczyciela jest utrzymać ich na tej drodze i za każdym razem gdy pobłądzą, wskazywać im właściwy kierunek analizując przyczyny napotkanych pomyłek. Badani zrozumieli własne błędy i niedociągnięcia, dostrzegli potrzebę pełnej, dogłębnej analizy problemu i docenili rolę i wagę formy wypowiedzi, przejrzystych komunikatów i jasnych poleceń. Studenci przyznali, że nie zdawali sobie sprawy, że tak trudno jest poprowadzić grupę słuchaczy właściwym torem rozumowania, nie narzucając własnych metod i sposobów, a jedynie prowadzić za rękę podczas matematycznej przygody.

LITERATURA

Ciosek M. (1984) *Dydaktyczne problemy związane ze strategiami rozwiązywania zadań matematycznych,* Wyż. Szk. Ped. Kraków, Rocznik Nauk.-Dydakt., nr 67, Prace z Dydaktyki Matematyki nr 2

Jastrzębska L. (2010) *Kształcimy wielu, nie patrzymy na jakość,* Wywiad z M. Sitkiem, EduFakty z 24.10.2010
Legutko M. (1989), *Uczenie rozwiązywania zadań na lekcjach matematyki,* Dydaktyka Matematyki nr 11
Klakla M. (2006) *Gotowa wiedza i aktywność w matematycznym kształceniu na przykładzie kątów Langleya,* Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis, Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia I, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, Kraków
Krygowska Z. (1989) *Zrozumieć błąd w matematyce,* Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego Seria V, Dydaktyka Matematyki 10,
Krygowska Z. (2003) *O poprawne rozumienie przez uczniów symbolu literowego w nauce algebry,* Przedruk z: Matematyka Nr 4, 1955, *W:* Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, red. J. Żabowski, t. I, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock
Polya, G. (1945) How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method (Princeton Science Library, 2004 ed.). Princeton University Press.
Polya, G. (1965) Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving (2 volumes combined, 1981 ed.). John Wiley and Sons
Schoenfeld, A. H. (1987) A Brief and Biased History of Problem Solving. In F. R. Curcio (Ed.), Teaching and Learning: A Problem-solving Focus (pp. 27–46). Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics
Siwek H. (1984) *Przedłużanie zadań,* Oświata i Wychowanie, Wersja B, nr 7
Treliński G. (1984) *Jak rozwiązać zadanie,* Oświata i Wychowanie, Wersja B, nr 7

Sylwia Kania

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski

sylwia.kania@us.edu.pl

SOME DIFFICULTIES IN TEACHER – STUDENT RELATIONS IN THE CONTEXT OF PROBLEM SOLVING

ABSTRACT

Using mathematical tools to describe introduced in particular problem situations makes basic ability that allows an individual student to develop mathematical skills. Proper analysis of the problem, thinking about the way of solution, accomplishing every step that was planned before and finally looking back on the whole problem from another perspective provide the foundation of the reasoning that leads to abstract thinking about considering text. George Polya's method of solving mathematical problems, which had to be modify due to constant digitalization of the reality, is still very important in the teacher – student relations.
In the paper I will show the method of solving some particular problems from Polish national exams, which every teacher should go with his students to achieve desired educational effects. I will also focus on some difficulties that can appear during the process of problem solving in the relation between teacher and students. That difficulties could not only become a reason of students' failure in mathematical learning but also could create bad habits in teachers' attitude.

Keywords: didactics of mathematics, problem solving, Polya's method