

Petra Surynková

Uniwersytet Karola

Wydział Matematyki i Fizyki

Katedra Edukacji Matematycznej

Sokolovská 83, 186 75 Praha, Republika Czeska

tel.: +420 9 5155 3235

petra.surynkova@mff.cuni.cz

GEOMETRIA PRZESTRZENNA W SZKOLNICTWIE ŚREDNIM: KSZTAŁCENIE UMIEJĘTNOŚCI PRZESTRZENNYCH ORAZ ROZPOZNAWANIE PROBLEMÓW UCZNIÓW W DZIEDZINIE GEOMETRII PRZESTRZENNEJ

Niniejszy artykuł dotyczy nauczania geometrii przestrzennej w szkołach średnich oraz związanych z nim sugestii odnoszących się do kursów geometrii prowadzonych w szkołach wyższych. Skupimy się przede wszystkim na zagadnieniach z dziedziny geometrii stanowiących przedmiot nauczania w Republice Czeskiej, tzn. zagadnieniach z zakresu geometrii przestrzennej, przekroju brył, przekształceń dwu- i trójwymiarowych figur geometrycznych w przestrzeni trójwymiarowej oraz wielu innych. Przedstawimy kilka przykładów typowych zadań geometrycznych na poziomie kształcenia średniego oraz zaawansowanych zagadnień realizowanych podczas kursów geometrii w szkołach wyższych. Doświadczenia zdobyte podczas prowadzenia kursów geometrii (na Uniwersytecie Karola w Republice Czeskiej) przeznaczonych dla studentów rozpoczynających naukę na uniwersytecie wskazują na poważne braki w zakresie ich umiejętności przestrzennych. Zidentyfikujemy niektóre z konkretnych problemów studentów w dziedzinie geometrii przestrzennej oraz przedstawimy kilka koncepcji nowo zaproponowanych ćwiczeń i zajęć przeznaczonych zarówno dla uczniów szkół średnich, jak i studentów, które mogłyby przyczynić się do zmniejszenia poziomu tych braków. Podczas zajęć korzystamy z pomocy dynamicznego systemu GeoGebra powszechnie używanego w procesie kształcenia na całym świecie.

Słowa kluczowe: geometria przestrzenna; umiejętności przestrzenne; szkolnictwo średnie; GeoGebra

MOTYWACJA

Nauczanie geometrii opisowej, która obejmuje geometrię wykreślną i przestrzenną, ma bardzo silną tradycję w Republice Czeskiej. Republika Czeska (w XIX i na początku XX wieku część Cesarstwa Austro-Węgierskiego) oraz jej sąsie-

dzi (Austria, Słowacja, Polska i Niemcy) należeli do krajów, w których nauczanie geometrii wykreślniej i badania w tej dziedzinie były prowadzone na wysokim poziomie (Grattan-Guinness, 2016). Program nauczania w czeskich szkołach podstawowych i średnich stanowi kontynuację tradycji nauczania geometrii (mam tu

na myśli głównie geometrię euklidesową), zaś czeskie szkoły wyższe (na przykład Uniwersytet Karola i Czeski Uniwersytet Technologiczny) z technicznie zorientowanymi programami studiów koncentrują się na nauczaniu kilku dziedzin geometrii (oprócz geometrii euklidesowej naucza się geometrii algebraicznej, różniczkowej, nieeuklidesowej i topologii). Wysoki poziom nauczania geometrii w szkołach podstawowych i średnich jednak w ostatnich latach spada, co jest spowodowane głównie mniejszą liczbą godzin lekcyjnych poświęconych tej dziedzinie nauki. Ten trend w sposób nieunikniony ma wpływ na treść kursów geometrii w szkolnictwie wyższym. Od ośmiu lat uczę geometrii Euklidesowej, geometrii wykreślnej i geometrii obliczeniowej na Wydziale Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Karola w Republice Czeskiej (a przedtem na Czeskim Uniwersytecie Technologicznym przez pięć lat). Kursy te są przeznaczone dla studentów studiów licencjackich i magisterskich specjalizujących się w nauczaniu matematyki i geometrii wykreślnej, tzn. przyszłych nauczycieli szkół średnich. Najważniejszym wymaganiem dotyczącym wszystkich tych przedmiotów jest podstawowa znajomość geometrii wykreślnej i przestrzennej. Gdy porównałam programy studiów obowiązujące od samego początku mojej kariery zawodowej nauczyciela akademickiego stwierdziłam, że nawet w tym stosunkowo krótkim czasie musiałam radykalnie ograniczyć poziom złożoności prowadzonych kursów. Oczywiście należy wziąć pod uwagę wiele czynników, które mogą przyczyniać się do tego stanu rzeczy: począwszy od niewystarczającego poziomu nauczania w szkołach średnich (lub nawet podstawowych) na braku zainteresowania i motywacji studentów kończąc. Należy również dodać, że przez lata programy nauczania na Wydziale Matematyki i Fizyki ulegały zmianom. Ich celem było zaspokajanie potrzeb i dotrzymanie kroku trendom społecznym. Gama nauczanych przedmiotów została rozszerzona, studentom

przedstawia się nowe dziedziny nauki i dyscypliny matematyczne oraz ich zastosowania, a wszystko to odbywa się w kontekście nowoczesnych technologii i oprogramowania komputerowego. Nie ma już potrzeby studiowania na przykład geometrii opisowej (ręcznego rysowania skomplikowanych obrazów, rzutów rzeczywistych obiektów, urządzeń technicznych lub budynków), co miało miejsce w minionym wieku, gdy inżynierowie, architekci i projektanci nie dysponowali nowoczesnym oprogramowaniem komputerowym służącym do pracy nad projektami. Z drugiej strony korzystanie z grafiki komputerowej w dalszym ciągu wymaga doskonałej znajomości zasad geometrii. Potrzeby uległy drastycznej zmianie. Niemniej jednak moim zdaniem posiadanie wiedzy obejmującej różne dziedziny geometrii jest konieczne. Obecnie, w erze informacji, stoimy przed nowymi wyzwaniami, do których w sposób znaczący i bezpośredni odnosi się wiele dziedzin geometrii (Pottman i wsp., 2007).

Z naukowego punktu widzenia do praktycznych zastosowań współczesnych dziedzin geometrii, takich jak geometria euklidesowa, różniczkowa, algebraiczna i topologia, zalicza się interpretację obrazu, rozpoznawanie obrazów i planowanie trasy robotów mobilnych, przetwarzanie wzorców w uczeniu maszynowym, oraz komputerowo wspomagane projektowanie architektoniczne i przemysłowe. Geometria ma zasadnicze znaczenie dla branży wytwórczej, inżynierskiej i budowlanej, branży gier wideo (np. włączanie autentycznych wnętrza i przestrzeni zewnętrznych do wirtualnych światów gier komputerowych), inżynieria odwrotna; digitalizacja rzeczywistych obiektów techniką skanowania 3D, cyfrowa rekonstrukcja powierzchni za pomocą chmur punktów, odtwarzanie kształtów rzeczywistych obiektów za pomocą druku 3D, grafika komputerowa i wiele innych. Zobacz na przykład publikacje LaValle'a (2006), Farina, Hoscheka i Kima (2002), Eilama (2005), Lipsona i Kur-

mana (2013), Foley'a i wsp. (1995). Wszystkie wyżej wymienione zastosowania łączy jedno: zasady geometrii.

Geometria ma ogromne znaczenie nie tylko w nauce i niektórych zawodach. Geometria jest ważna również w życiu codziennym. Umiejętności przestrzennych potrzebujemy, aby orientować się w otoczeniu, rozumieć przestrzenne relacje między obiektami, radzić sobie z codziennymi zadaniami, takimi jak pakowanie, przeprowadzka i wiele innych.

Ze względu na wspomniane znaczenie geometrii w wielu dziedzinach życia, konieczne jest dążenie do utrzymania wysokiej jakości nauczania geometrii na wszystkich poziomach kształcenia.

ZDOLNOŚCI PRZESTRZENNE

W niniejszym artykule skupimy się na tych zagadnieniach geometrycznych, które przyczyniają się do rozwijania zdolności przestrzennych. Według Leana i Clementsa (1981) *zdolności przestrzenne* można zdefiniować jako zdolności do umysłowego tworzenia obrazów i manipulowania nimi w umyśle. Sorby (1999) wyróżnił *zdolności przestrzenne* i *umiejętności przestrzenne*. Zdolności przestrzenne uznaje się za wrodzoną umiejętność wizualizacji, zaś umiejętności przestrzenne są wyuczone i nabywane w drodze kształcenia. Oba pojęcia są ściśle ze sobą powiązane i czasem trudno je odróżnić. Tatre (1990a) zdefiniował umiejętności przestrzenne, jako zdolność umysłu polegającą na wizualnym rozpoznawaniu, manipulowaniu, reorganizacji lub interpretowaniu relacji. Oprócz tego, opierając się na kilku badaniach w dziedzinie psychologii kształcenia, głównie McGee (1979), Tatre opisał również dwa główne rodzaje umiejętności przestrzennych. Podstawą tej kategoryzacji umiejętności przestrzennych są procesy umysłowe wykorzystywane do radzenia sobie z niektórymi

zadaniami. Dwiema głównymi kategoriami są *wizualizacja przestrzenna* i *orientacja przestrzenna*. Wymienione dwie kategorie zależą od tego, co stanowi przedmiot niektórych zadań. Jeśli konieczna jest zmiana lokalizacji lub zmodyfikowanie niektórych części albo całych odtworzonych w umyśle obiektów, wówczas takie zadanie uznaje się za wizualizację przestrzenną. Przeciwnie do powyższego, zadanie związane z orientacją przestrzenną nie wiąże się z umysłową zmianą lokalizacji prezentowanego obiektu. Obraz obiektu lub sytuacji pozostaje w umyśle taki sam i jest stały. Niemniej wykonywane zadanie wymaga umysłowej zmiany punktu widzenia. Według Tatre (1990a) zadania związane z orientacją przestrzenną mogą obejmować organizowanie, rozpoznawanie, interpretowanie oraz oglądanie wizualnej reprezentacji obrazu pod odmiennym kątem, jednakże nie odnoszą się do umysłowej zmiany umiejscowienia obiektu. Jeszcze bardziej szczegółową klasyfikację umiejętności przestrzennych autor przedstawił w kolejnej publikacji (Tatre, 1990b). Należy zauważyć również, że niektórzy autorzy wprowadzają kolejne rodzaje umiejętności przestrzennych. Więcej informacji na ten temat znajduje się w publikacji Katsioloudis, Jovanovic i Jones (2014).

Przeprowadzono kilka badań empirycznych będących próbą ustalenia właściwych metod poprawy zdolności przestrzennych uczniów. Katsioloudis, Jovanovic i Jones (2014) podsumowali te metody w swoim artykule. Omówię te, które stosują podczas prowadzenia kursów geometrii. Zdolności przestrzenne można poprawić poprzez realizację pewnych projektów nauczania z wykorzystaniem komputerowych wizualizacji 3D oraz działania polegające głównie na odręcznym szkicowaniu i manipulacji obiektami.

Ten artykuł w sposób szczególny odnosi się do zagadnień dotyczących zidentyfikowania zadań geometrycznych wymagających umiejętności orientacji i wizualizacji przestrzennej,

z którymi uczniowie mają problemy. Zaproponujemy tu również zajęcia, które mogłyby wspierać i doskonalić umiejętności przestrzenne uczniów uznane za ważne z punktu widzenia kształcenia technicznego (Sorby, 2009).

GEOMETRIA PRZESTRZENNA

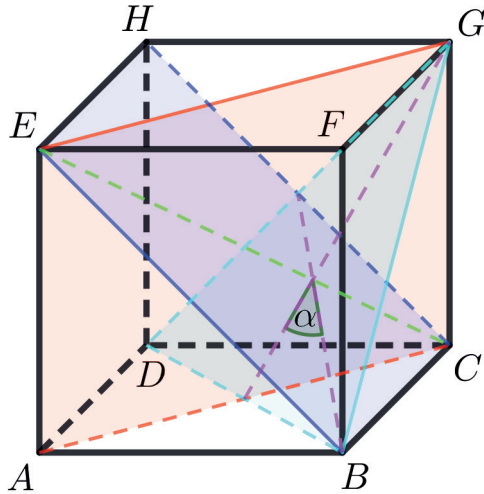
Podstawowym przedmiotem tego artykułu jest geometria szkolna, głównie geometria przestrzenna. W poniższej części artykułu omówię główne zagadnienia geometrii, z którymi studenci muszą być bardzo dobrze zaznajomieni zanim rozpoczną studia w szkole wyższej. Są to podstawy geometrii euklidesowej, geometrii wykreślnej i obliczeniowej, na których bazują kursy geometrii realizowane na naszym wydziale. Większość studentów, którzy rozpoczynają naukę na Wydziale Matematyki i Fizyki ukończyła szkoły ogólnokształcące. Zgodnie z czeskim krajowym programem edukacji w szkołach średnich nauczanie matematyki w czeskich gimnazjach obejmuje niżej wymienione zagadnienia (Ministerstwo Edukacji).

Geometria przestrzenna (stereometria).

Ta tradycyjna dziedzina geometrii obejmuje badanie trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. W jej zakres wchodzi pomiar objętości różnych brył, takich jak ostrosłupy, graniastosłupy, wielościany, walce, stożki, stożki ścięte i kule. Zwykle uwzględnia się tylko bryły foremne. Podczas rozwiązywania zadań z geometrii przestrzennej, kwestią o kluczowym znaczeniu jest poprawna wizualizacja trójwymiarowej sytuacji w dwóch wymiarach. Wizualizacja ta zwykle stanowi podstawę szukania rozwiązania. Z tych powodów przedmiotem nauczania są podstawowe techniki rzutowania. W tym zakresie w większości czeskich szkół średnich korzysta się z techniki *rzutowania ukośnego równoległego* (Carlbom i Paciorek, 1978). Rzutowanie ukośne równoległe jest

prostym rodzajem rzutowania równoległego, które polega na tworzeniu dwuwymiarowych obrazów o określonych właściwościach – linie równoległe są rzutowane za pomocą linii równoległych, a gdy rzutowany jest wielościan, zazwyczaj jego ściana lub ściany są równoległe do płaszczyzny obrazu (ściany te są rzutowane w rzeczywistych kształtach i rozmiarach, bez zniekształceń). Typowym zadaniem w geometrii przestrzennej jest ustalenie wielkości kąta tworzonego przez dwie półproste, na przykład dwie sąsiednie krawędzie albo powierzchniowe i przestrzenne przekątne wielościanu. Podobnym zadaniem jest znalezienie wielkości *kąta dwuściennego*, to znaczy kąta między dwiema przecinającymi się płaszczyznami. W tym przypadku można wziąć pod uwagę dwie sąsiednie ściany wielościanu, jak również płaszczyzny przekroju tego wielościanu. Kolejnym typowym zadaniem jest obliczenie wielkości kąta między płaszczyzną a przecinającą linią prostą. Ponownie możliwe jest uwzględnienie dowolnego połączenia krawędzi, ścian lub ogólniejszych wartości wejściowych. Zrozumienie tych sytuacji w przestrzeni trójwymiarowej wymaga prawidłowej wizualizacji. Uczniowie rozwiązują omawiane zadania na podstawie obrazu naszkicowanego na płaszczyźnie. Głównym problemem jest prawidłowe rzutowanie trójwymiarowej sytuacji oraz przedstawienie znanych danych wejściowych. Na podstawie prawidłowej wizualizacji możliwe jest ustalenie równań matematycznych lub rozwiązanie problemu przez wykorzystanie geometrii syntetycznej, to znaczy wykorzystując syntetyczne dowody twierdzeń geometrycznych.

Przykład 1: W przedstawionym sześciacie $ABCDEFGH$ należy znaleźć wielkość kąta dwuściennego między ścianą ACG i ścianą BCH . Rozwiązanie przykładu przedstawiono graficznie na rysunku 1 za pomocą rzutowania ukośnego równoległego. Można udowodnić, że poszukiwany kąt wynosi 60° .



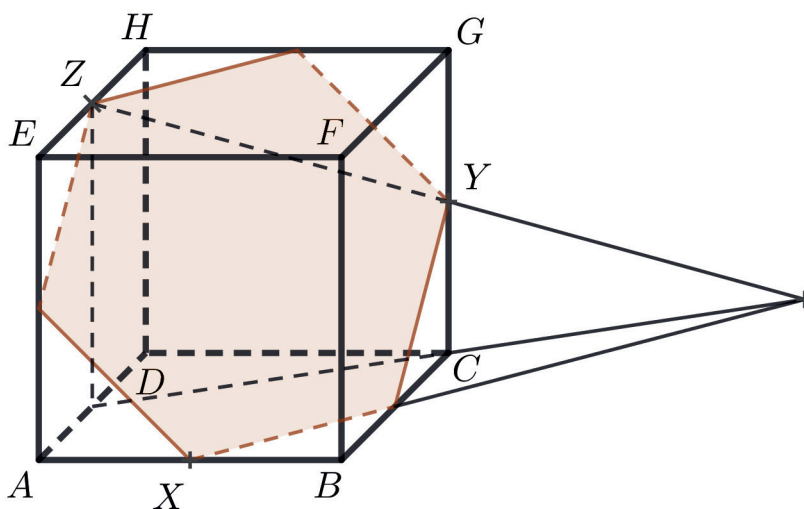
Rysunek 1: Kąt dwuścienny pomiędzy ścianą ACG i ścianą BCH przedstawiony w rzucie ukośnym, sytuacja przedstawiona w widoku z góry i od prawej strony.

Przekrój brył.

W obrębie geometrii przestrzennej mamy do czynienia z zagadnieniem *przekroju brył*. Przekrój jest niepustym przecięciem bryły za pomocą płaszczyzny. Płaszczyzna zawierająca przekrój bryły jest zwykle nazywana *płaszczyzną przekroju* (Pottman i wsp., 2007). Typo-

wym zadaniem rozwiązywanym przez studentów jest ustalenie przekroju wielościanu, gdy płaszczyzna przekroju zostaje wskazana przez trzy punkty niewspółliniowe. Jeśli zadanie ma zostać rozwiązane graficznie, ponownie konieczne jest zastosowanie rzutowania trójwymiarowej sytuacji. Istnieje kilka podstawowych etapów rozwiązywania przekroju brył na podstawie podstawowych twierdzeń geometrycznych dotyczących przecięcia trzech płaszczyzn. Trzy niezbieżne płaszczyzny mogą przecinać się w jednym punkcie; każda płaszczyzna przecina pozostałe w jednej linii; dwie równoległe płaszczyzny oraz inna płaszczyzna przecina każdą z nich w jednej linii; trzy płaszczyzny przecinają się w jednej linii; lub trzy płaszczyzny mogą być równoległe.

Przykład 2: W przedstawionym sześciangu $ABCDEFGH$ należy znaleźć przekrój sześciangu przez płaszczyznę XYZ , jeśli punkty X, Y, Z są odpowiednio środkami krawędzi AB, CG, EH . Rozwiązanie przykładu przedstawiono graficznie na rysunku 2 za pomocą rzutowania ukośnego równoległego. W tym przypadku przekrój jest sześciokątem foremnym.



Rysunek 2: Przekrój sześciangu przez płaszczyznę XYZ przedstawiony techniką rzutowania ukośnego równoległego, prezentacja sytuacji w widoku z góry i od prawej strony.

Przekształcenia figur dwu- i trójwymiarowych w przestrzeni trójwymiarowej.

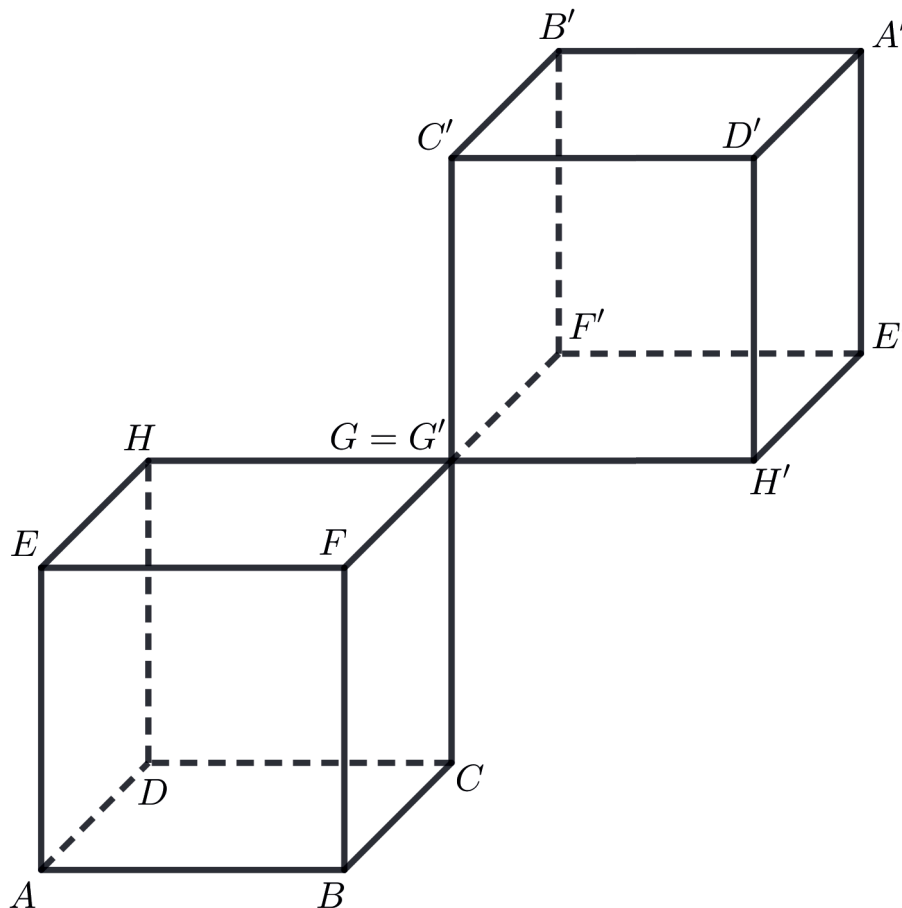
Bardzo ważnym zagadnieniem badawczym, które dotyczy przestrzeni trójwymiarowej są przekształcenia. Przekształcenia są symetrami płaskimi, symetrami środkowymi, symetrami osiowymi, obrotami lub przesunięciami równoległymi. Można również badać składniki tych przekształceń.

Przykład 3: W przedstawionym sześcianie $ABCDEFGH$ należy znaleźć płaszczyznę symetrii sześcianu w symetrii środkowej z środkiem

w punkcie G (wierzchołek sześcianu). Rozwiązanie przykładu przedstawiono graficznie na rysunku 3 za pomocą rzutowania ukośnego równoległego.

ROZPOZNAWANIE PROBLEMÓW STUDENTÓW W DZIEDZINIE GEOMETRII PRZESTRZENNEJ

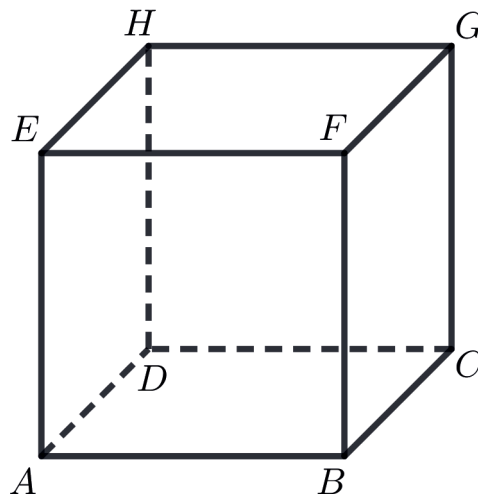
Porozmawiajmy o głównych zagadnieniach, które są niezrozumiałe dla uczniów. Jak już wspomniano zagadnienia te stanowią podstawę kursów geometrii euklidesowej, geometrii wykreślnej i geometrii obliczeniowej



Rysunek 3: Płaszczyzna symetrii sześcianu w symetrii środkowej z środkiem w punkcie G przedstawiona techniką rzutowania ukośnego, prezentacja sytuacji w widoku z góry i od prawej strony.

prowadzonych na naszym wydziale. Nauczanie w tym zakresie może być bardzo trudne, jeśli studenci nie rozumieją podstaw geometrii przestrzennej. Podczas mojej ośmioletniej kariery nauczyciela akademickiego na Wydziale Matematyki i Fizyki prowadziłam wykłady i seminaria z geometrii dla ponad 100 studentów. Od samego początku zbierałam dane do jakościowej analizy porównawczej umiejętności przestrzennych studentów, którą planuję opracować w przyszłości. Poniżej przedstawiam zagadnienia, z którymi studenci mają największe problemy w przedmiocie geometrii, jakie rozpoznałam do tej pory:

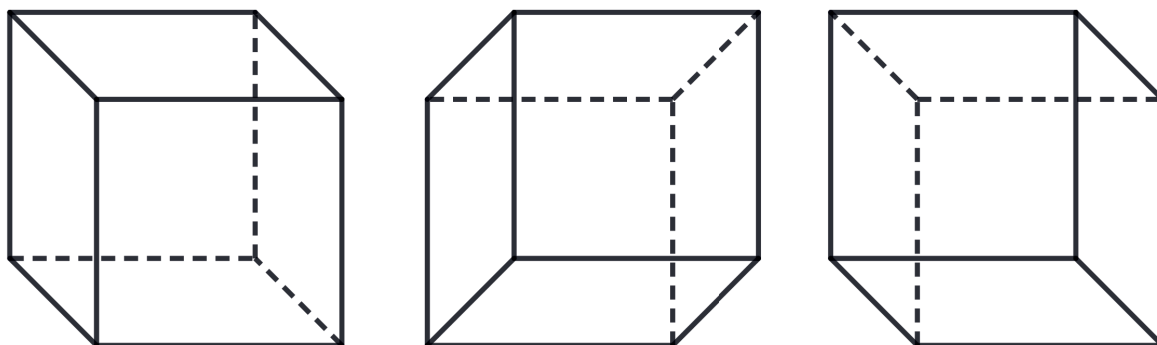
- wizualizacja sytuacji trójwymiarowej – szkicowanie sytuacji trójwymiarowej w rzucie równoległym, takim jak rzut ukośny (na przykład niepoprawna prezentacja skrótów perspektywicznego odcinków linii, które nie są równoległe do płaszczyzny obrazu),
- interpretacja obrazu dwuwymiarowego – wyniku rzutowania równoległego (na przykład niepoprawne ustalanie rzeczywistych długości, wymiarów i kształtów zniekształconych przez rzutowanie),
- studenci zazwyczaj potrafią naszkicować trójwymiarową sytuację na płaszczyźnie w widoku z góry i od prawej strony (technika po-



Rysunek 4: Widok sześciangu z góry i od prawej strony. Płaszczyznę obrazu uznaje się za pionową, może być ekranem.

wszechnie stosowana w podręcznikach), problem pojawia się, gdy sytuacja jest prezentowana w widoku z góry i od lewej strony (rysunek 4) lub w widoku z dołu i od lewej albo prawej strony (rysunek 5).

Trzeci z wymienionych problemów jest bardzo częsty. Studenci potrafią rozwiązać zadanie z przykładu 3 za pomocą rzutu przedstawionego na rysunku 3, ale mają problemy



Rysunek 5: Widok sześciangu z góry i od lewej, z dołu i od lewej oraz z dołu i od prawej. We wszystkich przypadkach płaszczyznę obrazu uznaje się za pionową, może być ekranem.

ze znalezieniem rozwiązania, jeśli ta sama trójwymiarowa sytuacja zostanie przedstawiona w widoku z dołu. Widok z góry jest powszechnie używany w podręcznikach, ale nie należy ograniczać się do niego. Można również wyróżnić położenie płaszczyzny obrazu. Na użytek tego artykułu można uznać, że na wszystkich rysunkach płaszczyzna obrazu jest pionowa (może to być płaszczyzna ekranu lub tablicy).

PROPOZYCJE ĆWICZEŃ I ZADAŃ

Powyższe stwierdzenia stanowią podstawę mojej praktyki nauczania określonych zagadnień geometrii przestrzennej. Aby poprawić poziom zrozumienia geometrii przestrzennej przez studentów, podczas rozwiązywania przez nich zadań geometrycznych przedstawionych na płaszczyźnie korzystam z pomocy wizualnych w postaci trójwymiarowych modeli komputerowych wraz z fizycznymi modelami brył i sytuacji trójwymiarowych. Przedstawienie trójwymiarowego modelu komputerowego lub modelu fizycznego bardzo ułatwia studentom pracę. Również Katsioloudis, Jovanovic i Jones (2014) twierdzą, że korzystanie z trójwymiarowych modeli brył jako pomocy wizualnych ma ogromny potencjał w zakresie poprawy umiejętności wizualizacji przestrzennej podczas kursów dotyczących technologii przemysłowych i kształcenia technicznego. Oprócz innych programów i aplikacji korzystam z dynamicznego oprogramowania do nauki matematyki i geometrii *GeoGebra*.

Zauważyłam, że bardzo ważne jest ćwiczenie ręcznego szkicowania brył i sytuacji trójwymiarowych w różnych rzutach graficznych i różnych widokach – z góry i z dołu. Dlaczego mamy ograniczać się tylko do widoku z góry, gdy w życiu codziennym obserwujemy otaczające nas przedmioty z różnych perspektyw?

WNIOSKI I DALSZY BADANIA

W niniejszym artykule przedstawiłam główne problemy studentów, jakie rozpoznałam podczas ośmioletniego nauczania geometrii na Wydziale Matematyki i Fizyki. Zaproponowałam kilka ćwiczeń, które pomagają moim studentom osiągnąć wyższy poziom zrozumienia geometrii przestrzennej.

W oparciu o moje doświadczenia dydaktyczne i rozpoznane problemy studentów wprowadzam zmiany do powszechnie stosowanych testów oceny wyobraźni przestrzennej, takich jak testy rotacji umysłowej (Vanderberg i Kuse, 1978) lub test wizualizacji przestrzennej Uniwersytetu Purdue – wizualizacja rotacji (Guay, 1977). W semestrze zimowym 2018 r. mam zamiar poprosić nowych studentów o wykonanie wymienionych testów w ramach egzaminu wstępnego, aby udowodnić lub obalić moje hipotezy. W oparciu o wyniki w semestrze zimowym skupię się na doskonaleniu niektórych umiejętności przestrzennych studentów za pomocą trójwymiarowego modelowania komputerowego, modeli fizycznych i ćwiczenia umiejętności przestrzennych na konkretnych przykładach. Podobne testy przeprowadzę na zakończenie kursu geometrii w semestrze zimowym.

PODZIĘKOWANIA

Artykuł powstał dzięki wsparciu projektu PROGRES Q17 Przygotowanie nauczycieli i zawód nauczyciela w kontekście nauki oraz ośrodka badawczego Uniwersytetu Karola nr UNCE/HUM/024.

PIŚMIENNICTWO

- Carlbohm, I. & Paciorek, J. (1978). Planar Geometric Projections and Viewing Transformations. *ACM Computing Surveys* 10 (4), 465-502.
- Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning, In Grouws, Douglas A. (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, New York, NY, England Macmillan Publishing Co., 420-464.
- Eilam, E. (2005). *Reversing: Secrets of Reverse Engineering*. Wiley.
- Farin, G., Hoschek, J., & Kim, M., S. (2002). *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. Elsevier Science.
- Foley, J. D., Dam, A., Feiner, S. K., & Hughes, J. F. (1995). *Computer Graphics: principles and practice*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Grattan-Guinness, I. (2016). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. Taylor & Francis Ltd.
- Guay, R. (1977). *Purdue Spatial Visualization Test: Visualization of Rotations*. W. Lafayette, In Purdue Research Foundation.
- Katsioloudis, P., Jovanovic, V., & Jones, M. (2014). A comparative analysis of spatial visualization ability and drafting models for industrial and technology education students. *Journal of Technology Education*, 26(1), 88-101.
- LaValle, S. M. (2006). *Planning Algorithms*. Cambridge University Press.
- Lean, G., & Clements, M. A. (Ken) (1981). Spatial Ability, Visual Imagery, and Mathematical Performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 267-299.
- Lipson, H., Kurman, M. (2013). *Fabricated: The New World of 3D Printing*. John Wiley & Sons.
- McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86(5), 889-918.
- Pottmann, H., Asperl, A., Hofer, M., & Kilian A. (2007). *Architectural Geometry*. Exton, USA: Bentley Institute Press.
- Sorby, S. (1999). Developing 3-D Spatial Visualization Skills. *Engineering Design Graphics Journal*, vol. 63, no. 2 (Spring), 21-32.
- Sorby, S. A. (2009). Educational research in developing 3-D spatial skills for engineering students. *International Journal of Science Education*, 31(3), 459-480.
- Tartre, L. (1990 a). Spatial Orientation Skill and Mathematical Problem Solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(3), 216-229.
- Tartre, L. A. (1990 b). *Spatial skills, gender & mathematics. Mathematics and gender: Influences on teachers and students*. New York: Teachers' College Press.
- Vandenberg, S. G., & Kuse, A. R. (1978). Mental rotations, a group test of three-dimensional spatial visualization. *Perceptual and Motor Skills*, 47(2), 599-604.

Online

The Ministry of Education, Youth and Sports, Rámcový vzdělávací program pro gymnázia (in Czech), the Czech National Educational Program for Gymnasiums, online <http://www.msmt.cz/?lang=2> [retrieved July 2018].

Petra Surynková

Charles University
Faculty of Mathematics and Physics
Department of Mathematics Education
Sokolovská 83, 186 75 Praha, Czech Republic
tel.: +420 9 5155 3235
petra.surynkova@mff.cuni.cz

SPATIAL GEOMETRY IN SECONDARY SCHOOL EDUCATION:
TRAINING SPATIAL ABILITIES
AND IDENTIFYING STUDENTS' PROBLEMS IN SPATIAL GEOMETRY

ABSTRACT

The article addresses the teaching of spatial geometry in secondary schools with the implications to geometric courses at the university. We will focus especially on geometric topics which are taught in the Czech Republic, i.e. solid geometry, cross section of solids, transformations of two- and three-dimensional shapes in three-dimensional space and many more. We will show several examples of typical geometric tasks from secondary school education and advanced topics from geometric courses at the university. Experiences gained from lecturing geometric courses (at Charles University, Czech Republic) intended for student newcomers to university show serious gap in students' spatial abilities. We will identify some of concrete students' problems in spatial geometry and introduce several approaches, newly suggested exercises and activities for the both secondary school and university students which could mitigate these gaps. Our activities in the classrooms are supported with dynamic system GeoGebra which is widely used in education process all over the world.

Keywords: spatial geometry; spatial ability; secondary school education; GeoGebra