Studia Psychologiczne. t. 56 (2018), z.4, s. 3–17
PL ISSN 0081-685X
DOI: 10.2478/V1067-010-0165-5

Anna Rybak

Uniwersytet w Białymstoku, Polska
Wydział Matematyki i Informatyki
e-mail: a.rybak@uwb.edu.pl

István Lénárt

Uniwersytet im. Loránda Eötvösa
w Budapeszcie, Węgry
e-mail: ilenart@cs.elte.hu

GEOMETRIA PORÓWNAWCZA: PRZEŁAMYWANIE BARIER POMIĘDZY MATEMATYKĄ I FOBIĄ MATEMATYCZNĄ

Motto:
Cechą, którą uczniowie najbardziej cenią u swojego nauczyciela
jest zdolność przekonania ich o ich własnych zdolnościach.

W artykule omawiamy niektóre cechy szkolnej matematyki jako ważne czynniki powstawania fobii matematycznej w społeczeństwie. Staramy się podkreślić różnicę między dwoma obrazami matematyki: tym oglądanym przez ludzi owładniętymi matematyczną fobią i tym oglądanym przez miłośników matematyki jak my. Przedstawiamy pewne propozycje przezwyciężenia problemów w edukacji matematycznej, i bardziej szczegółowy opis metody o nazwie Geometria porównawcza na płaszczyźnie i na sferze. Opisujemy też konkretne doświadczenia i eksperymenty prowadzone w klasie i poza klasą. Niniejsza praca nie jest kierowana tylko do ekspertów z zakresu nauczania matematyki, ale także do społeczności szkolnej jako całości.

Słowa kluczowe: edukacja matematyczna, fobia matematyczna, motywacja, postawy wobec matematyki, geometria porównawcza.

WPROWADZENIE

Historia, nawet ta najnowsza, jeszcze raz wskazuje na znaczenie i odpowiedzialną rolę edukacji w społeczeństwie demokratycznym. Prawo do głosowania ma niewielkie znaczenie, jeśli wyborca nie ma wystarczających umiejętności podejmowania złożonych decyzji.

Nie można dostarczyć człowiekowi, w ramach wykształcenia ogólnego, całej wiedzy z matematyki, historii, ekonomii itd., która jest potrzebna do rozwiązywania trudnych problemów politycznych lub ekonomicznych. Zadaniem szkoły jest więc wypracowanie u ucznia optymalnej równowagi pomiędzy samokontrolą a wiarą w siebie; rozwinięcie w nim umiejętności rozpoznawania fałszywych wiadomości, przypadków niewłaściwego wykorzystania danych naukowych lub kłamstw podawanych w przebraniu argumentów matematycznych. Istotą wszystkich edukacyjnych działań powinno być kształcenie ludzi o niezależnych umysłach, tworzących tolerancyjne i środowiskowo świadome społeczeństwa.

Większość uczonych i praktyków zgodnie określa główne cele nauczania matematyki. ‘Myśleć twórczo’, ‘Konstruować samodzielnie wiedzę’, ‘Matematyka jest fajna’ i inne popularne slogany wyrażają dobre chęci twórców programów nauczania i nauczycieli.

Dlaczego więc odczuwamy brak kandydatów na studia matematyczne? Dlaczego obserwujemy obniżenie poziomu kompetencji matematycznych uczniów po latach spędzonych w szkole? Dlaczego poziom pytań z zakresu matematyki we wszelkiego rodzaju quizach medialnych jest żenujący, a odpowiedzi często są jeszcze bardziej żenujące? Dlaczego niemal powszechny jest strach przed matematyką jako ‘najtrudniejszym przedmiotem szkolnym’? Dlaczego matematyka wzbudza w społeczeństwie większy niepokój niż sympatię?

Kogo lub co należy obarczyć winą za to? Część odpowiedzi łączy z publicznym wizerunkiem matematyki, ale trzeba też przeanalizować różne aspekty całego systemu edukacji.

OBRAZ MATEMATYKI

Dla nas, autorów, matematyka jest jednym z największych osiągnięć ludzkiego umysłu, kompozycją zdrowego rozsądku i czystej poezji, baśnią o „nieistniejących w realu” obiektach jak punkty, linie czy liczby (nie weźmiesz ich przecież do ręki), które jednak są bezpośrednio połączone z jak najbardziej realnymi cudami nauki i technologii. Zawsze gotowa jest uczyć się na swoich błędach i zmieniać je w sukcesy. Mówi ona o przygodach swobodnej i odważnej myśli w poszukiwaniu harmonii i prawdy.

Ten obraz różni się diametralnie od obrazu nudnych wzorów, beznadziejnych ćwiczeń i starożytnych imion, których trzeba nauczyć się na pamięć (i które najczęściej zapomina się zaraz po egzaminie) – bez jakiegokolwiek związku z zainteresowaniami współczesnych uczniów.

‘Trudna i nudna, ale użyteczna’?

Ten argument, pozornie na korzyść matematyki jako przedmiotu szkolnego, jest faktycznie jednym z motywów powstawania fobii matematycznej w szkole i poza nią.

Nowoczesne technologie czynią matematyczne wzory i twierdzenia bezpośrednio dostępnymi uczącym się na różnych etapach edukacji. Nic dziwnego, że młodzi ludzie poddają w wątpliwość konieczność pamiętania faktów, które są dostępne na urządzeniach elektronicznych w dowolnym momencie. Nie negujemy tutaj znaczenia nauczania o tradycyjnych pojęciach, ale zwracamy uwagę, że nauczanie to nie może ciągle odbywać się tak, jak odbywało się w ciągu wieków przed erą komputerów.

Ponadto, mamy głębokie wątpliwości co do podstaw określenia przedmiotu szkolnego jako ‘nudny ale przydatny’. Jak wspomnieliśmy powyżej, system szkolny nie jest w stanie wprowadzić pełnej istniejącej wiedzy z żadnego przedmiotu. Dlatego też, zadanie szkoły jest wręcz przeciwne do nauczania ‘nudnych ale przydatnych’ tematów. Zadaniem tym jest wywoływanie zapału u uczniów poprzez umożliwienie przeżywania momentów olśnienia, budzenie w nich poczucia satysfakcji i wiary w siebie poprzez matematyczną działalność. ‘*Użyteczne tematy*’ nie mogą być rekompensatą za nudę, niepokój i kompleks niższości ucznia.

Pragniemy dodać jeszcze jedną uwagę o szerzącym się nieporozumieniu. Często używana fraza ‘*matematyka z życia codziennego*’ nie oznacza, że każde zadanie ma się odnosić do zakupów czy spłaty kredytów. ‘*Matematyka z życia codziennego*’ jest drogą radzenia sobie z naszymi doświadczeniami, rozwiązywania problemów, które napotykamy w życiu. Używając trochę „naciąganego” porównania: nie uczymy się o Hamlecie dlatego, że bratobójstwo jest powszechne ‘*w życiu codziennym*’, ale dlatego, że Hamlet napotkał problem i starał się rozwiązać go, przez co jest bliski nam – czytelnikom z XXI wieku. Podobnie, ‘*dotycząca* *rzeczywistości*' sytuacja w matematyce oznacza dużo więcej niż wymyślenie zwykłego codziennego zastosowania pojęcia matematycznego. To nie „wierzchnie okrycie", ale prawdziwy duch matematyki czyni matematykę '*dotyczącą rzeczywistości*'.

TRUDNE KWESTIE W EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

Aneta Czerska, autorka projektu „Cudowne dziecko" stawia następujące pytania (Czerska, 2015): Czy szkoła zabija matematyczne talenty? Czy podręczniki szkolne zabijają matematyczne talenty? Czy nauczyciel zabija matematyczne talenty? Czy podstawa programowa zabija matematyczne talenty? Czy dziecko rozmyślnie zabija swój matematyczny talent? Czy rodzice gubią matematyczne talenty swoich dzieci?

A. Czerska stwierdza, że te pytania dotyczą wszystkich dzieci, ponieważ matematyczny talent można rozwinąć u każdego ucznia, w takiej czy innej formie. Logicznie, stawia ona również pytanie o odpowiedzialność za wzbudzanie fobii matematycznej w szkole.

Sian Beilock z Chicago University mówi (Beilock, 2010), że odpowiedzialność leży po stronie nauczycieli klas pierwszych w szkołach podstawowych, głównie kobiet, ponieważ dzieci chwytają strach i stereotypy od swoich nauczycieli. Mogłoby to oznaczać, że nauczycielki nie są odpowiednio przygotowane do nauczania matematyki, a ich własne matematyczne lęki mają negatywny wpływ na osiągnięcia uczennic.

Nawet powierzchowna analiza programu przygotowania przyszłych nauczycieli klas I-III potwierdza odnoszone przez nas wrażenie, że edukacja matematyczna ma drugorzędne znaczenie na wydziałach pedagogicznych naszych uniwersytetów. Wielu przyszłych nauczycieli tego etapu edukacyjnego ma silną awersję do matematyki. Badania przeprowadzone przez Instytut Badań Edukacyjnych w latach 2012-14 pokazały, że jeden na pięciu absolwentów studiów pierwszego stopnia przygotowujących do nauczania w klasach I-III był uderzającym ignorantem w zakresie podstawowych pojęć matematycznych. Niewiedza nauczyciela ma duże szanse zabić zainteresowanie ucznia i przyczynić się do negatywnego obrazu matematyki w społeczeństwie (IBE, 2015).

Jednak to jest tylko jedna strona obrazu. W naszej opinii, główna przyczyna leży w sposobie przygotowania nauczycieli do zawodu. Bertrand Russell w „Zasadach matematyki" napisał: „Matematyka zawiera w sobie nie tylko prawdę, ale i najwyższe piękno – piękno chłodne i surowe, podobne do piękna rzeźby." *(Russell, 1903) i niektórzy wykładowcy wciąż wysoko cenią przestarzały obraz matematyki jako* '*chłodnej i surowej*' *dziedziny, której główne przesłanie nie może i nie powinno być rozpowszechniane wśród mas. Ta koncepcja często jest wiązana ze szczególną pogardą dla edukacji* wyrażaną np. w powiedzeniach: „Nauczyciele matematyki nie są uczonymi, tylko rzemieślnikami", „Dydaktyka nie jest nauką, lecz garstką codziennych praktyk". (Konkretne odnośniki do wypowiedzi nie są tutaj dostępne, ponieważ opinie te wyrażane są często podczas osobistych kontaktów.)

W naszej opinii ta koncepcja stanowi jedną z największych przeszkód w rozpowszechnianiu i (nawet ważniejsze) popularyzowaniu matematyki wśród laików. Naszym celem jest podanie w tym artykule propozycji, które mogą być przydatne w rozwiązywaniu wspomnianych problemów.

MOTYWACJA CZY DEMOTYWACJA DO UCZENIA SIĘ MATEMATYKI W SZKOLE?

Dobra motywacja do uczenia się matematyki jest jednym z najlepszych lekarstw przeciwko fobii matematycznej. Jako taka, jest w centrum uwagi Raportu "*Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies*": „Jednakże powinno być zauważone, że motywacja do zajmowania się matematyką nie jest stabilną właściwością ucznia, ale dynamiczną, podlegającą zmianom cechą. Na przykład w tematycznym raporcie Czeskiego Inspektoratu Szkolnego z 2008 roku oraz w raporcie ze szkockiego badania osiągnięć uczniów w 2008 roku porównano motywację uczniów na różnym etapie edukacji. W obu raportach zawarta jest konkluzja, że motywacja spada podczas nauki w szkole średniej, co podkreśla bardzo ważną rolę nauczycieli w zakresie stosowania różnych metod kształcenia i wspieraniu motywacji uczniowskiej. (Następny znak, że nie można winić tylko nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej.) Wyniki porównawczego *badania* osiągnięć uczniów w matematyce i przyrodzie TIMSS również potwierdzają, że uczniowie klas czwartych mają dużo bardziej pozytywne nastawienie do matematyki niż ich koledzy z klas ósmych (bądź w ósmym roku uczenia się). Przeciętnie w krajach UE uczestniczących w badaniu TIMSS 67% uczniów klas czwartych i tylko 39% uczniów klas ósmych miało bardzo pozytywne nastawienie do matematyki." (Report, 2011).

Jaka jest przyczyna tego spadku motywacji? Jak zatrzymać lub nawet odwrócić ten proces?

Phyllis L. Newbill w swojej rozprawie „Strategie poprawy postaw kobiet w stosunku do nauk przyrodniczych" mówi, że uczniowskie postawy w stosunku do matematyki stanowią istotny aspekt motywacji. Postawy są stanami psychicznymi, które składają się z trzech komponentów: składnika poznawczego, składnika emocjonalnego i składnika związanego z zachowaniem. W kontekście edukacji są one traktowane jako czynniki osobiste, które wpływają na uczenie się (Newbill, 2005).

Akinsola M. K. i Olowojaiye F. B. w artykule „Nauczycielskie metody nauczania i uczniowskie postawy wobec matematyki" mówią, że „uczniowskie pozytywne postawy wobec matematyki, które mogą być jeszcze wzmocnione przez stosowanie efektywnych strategii nauczania, mogą sprzyjać osiągnięciom". Z drugiej strony, negatywne uczucia lub lęk mogą stać się barierą w osiąganiu dobrych wyników w uczeniu się (Akinsola i Olowojaiye, 2008). Natomiast lęk matematyczny jest stanem afektywnym lub emocjonalnym, który ma wpływ na wyniki uczniów – możemy przeczytać w (Zientek, Yetkiner i Thompson, 2010).

Innym czynnikiem, który bardzo wpływa na na pozytywną postawę wobec matematyki i motywację do jej uczenia się jest wiara ucznia w swoje możliwości – jak podkreśla motto tego artykułu oraz co zostało wykazane przez wielu badaczy (Pajares i Kranzler, 1995), (Pajares i Miller, 1994), (Pajares i Graham, 1999), (Hackett i Betz, 1989).

Inny raport zatytułowany „Edukacja matematyczna w Europie: wspólne wyzwania i krajowe polityki" daje następującą radę: „Nauczanie matematyki w szkole powinno motywować uczniów do aktywnego udziału w procesie uczenia się. Charakter zadań i ćwiczeń stosowanych w nauczaniu ma wielki wpływ na to, czy uczeń czuje wyzwanie i zainteresowanie matematyką i jest zmotywowany do zaangażowania się w proces uczenia się. Badania nad kluczowymi wpływami na przyjmowanie przez uczniów pozytywnych postaw wobec matematyki sugerują, że metody nauczania i zadania muszą być angażujące, różnicujące i połączone z uczniowskim życiem codziennym." (Report, 2011)

CZEGO I JAK UCZYĆ?

Najczęściej zadawanymi przez uczniów pytaniami są: Dlaczego mamy zajmować się tym czy tamtym tematem? Dlaczego mamy udowadniać twierdzenia? Dlaczego mamy uczyć się teorii z matematyki?

Dla wielu uczniów zastosowania matematyki ograniczają się do płacenia rachunków lub planowania remontów, gdzie występuje elementarna geometria i arytmetyka. Nie czują oni (a może raczej ich nauczyciele nie dają im odczuć), że matematyka daje im okazję do uczenia się myślenia, wnioskowania, podejmowania decyzji – czyli nabywania umiejętności, które mają kluczowe znaczenie w wielu dziedzinach życia. I prawdopodobnie bardzo niewielu uczniów łączy matematykę z pięknem i harmonią w ujęciu artystycznym – w przeciwieństwie do słynnego powiedzenia angielskiego matematyka G. H. Hardy'ego: „Piękno jest pierwszym testem: nie ma stałego miejsca na świecie dla brzydkiej matematyki." (Hardy, 1940)

W raportach, które ukazują się każdego roku po egzaminach zewnętrznych w Polsce, autorzy wskazują problemy, które widoczne są na podstawie analizy wyników tych egzaminów i rekomendują szkołom i nauczycielom pewne drogi rozwiązania tych problemów. Jeden z raportów opracowany po egzaminie gimnazjalnym w 2015 roku podkreśla:

- Szczególna uwaga powinna być zwrócona na zadania, które wymagają prowadzenia rozumowań i argumentowania, gdzie poziom wykonania pozostaje niski w ciągu kolejnych lat. Na przykład prawidłowe konstrukcje geometryczne, które wymagały samodzielnego sformułowania problemu, zostały wykonane przez niespełna 35% uczniów. Dla wielu z nich wielkim problemem jest udowodnienie twierdzenia lub uzasadnienie tezy.
- Uczniowie często używają niezgrabnego języka matematycznego w swoich rozumowaniach, bez dobrze przemyślanej strategii i porządku. Zapominają podsumować swoje wyniki lub wyciągnąć wniosek.
- Skutecznie zajmują się problemami osadzonymi w kontekście praktycznym lub zadaniami, które mogą być rozwiązane z użyciem znanych algorytmów. Jednakże, zdobyta przez nich wiedza często zawodzi ich w obliczu niespodziewanej sytuacji, która wymaga zastosowania nowego odpowiedniego algorytmu.
- Czasami uczniowie mają problemy z czytaniem i analizowaniem treści zadania.

Rekomendacje dla szkół:

- W praktyce szkoły powinny stosować więcej zadań na uzasadnianie i prowadzenie rozumowań, kształcić i rozwijać język matematyczny, wdrażać dobre nawyki myślowe, zachęcać uczniów do aktywności w sytuacjach wymagających rozwiązywania problemów.
- Dobrze byłoby, aby uczniowie na lekcjach rozwiązywali zadania, w których problem został przedstawiony w nietypowy sposób. Radzenie sobie w sytuacjach dotąd nieznanych to ważna umiejętność nie tylko matematyczna. (Report1, 2015)

W raporcie sporządzonym po egzaminie maturalnym z matematyki podkreślone zostały m.in. następujące problemy:

- Poważne trudności sprawiają na maturze z matematyki zadania wymagające przeprowadzenia rozumowania, prowadzącego do uzasadnienia prawdziwości twierdzenia lub własności obiektów matematycznych, szczególnie z zakresu algebry.
- Trudności sprawiają zdającym przede wszystkim zadania, wymagające wieloetapowych rozwiązań zbudowanych w oparciu o złożone strategie.

Rekomendacje:

- Niezwykle ważne jest, by kształtować u uczniów świadomość, że rozwiązanie zadania to nie tylko ciąg równoważnych równań lub prowadzenie obliczeń, ale także rzetelne wytłumaczenie zależności, opis wnioskowania i słowne uzasadnienia poprawności rozumowania.
- Szczególne miejsce w nauczaniu matematyki należy poświęcić zagadnieniom wieloetapowym. Umiejętność opracowania

i przeprowadzenia logicznego ciągu następujących po sobie działań jest sprawnością nie do przecenienia, a matematyka jest jedną z tych dziedzin, które w naturalny sposób mogą pomóc w kształtowaniu tej umiejętności. (Report2, 2015)

Powyższa lista pokazuje pewne ważne elementy fobii matematycznej. Nauczyciele próbowali i próbują przezwyciężyć je różnymi drogami. Spróbujemy włączyć się do tych wysiłków poprzez zaproponowanie pewnej metody nauczania geometrii na różnych poziomach edukacyjnych.

GEOMETRIA PORÓWNAWCZA POMIĘDZY PŁASZCZYZNA A SFERĄ

Aby zachęcić uczniów do czynnego uczestnictwa zamiast biernego udziału w procesie kształcenia, musimy zaoferować im sytuację interesującą, stanowiącą wyzwanie, wymagającą podejmowania decyzji, dostosowaną do poziomu rozwoju ich kompetencji. Problem polega na tym, że każda gałąź szkolnej matematyki bazuje na jednej ustalonej drodze myślenia lub na jednym systemie aksjomatów. Dopiero po zaakceptowaniu tego systemu uczeń może rozważać twierdzenia lub dochodzić do nowych ustaleń. Czasami niechęć do matematyki wynika z niecierpliwości ucznia, który nie chce czekać na nowe ciekawe momenty uczestnicząc w wielu „nudnych" godzinach tradycyjnych lekcji. Proponujemy zmianę metodyki nauczania poprzez wprowadzenie dwóch lub więcej podejść do nauczania tej samej gałęzi matematyki, nauczanie różnych systemów aksjomatycznych równolegle. To podejście może być stosowane nie tylko w kształceniu matematycznym, ale też w naukach społecznych i humanistycznych.

Tutaj ograniczymy się do geometrii porównawczej pomiędzy płaszczyzną i sferą. Podstawową metodą, na której zbudowany jest projekt, jest bezpośrednie uczniowskie eksperymentowanie, głównie na trójwymiarowych realnych modelach, jak też modelach wirtualnych i grach. Oprócz tradycyjnych przyrządów geometrycznych, które używane są do wykonywania konstrukcji na płaszczyźnie, stosujemy specjalne przyrządy do geometrii sferycznej. Wiele wstępnych eksperymentów może być wykonanych na przedmiotach codziennego użytku, jak piłeczki, globusy i owoce o kulistym kształcie.

Oboje uczyliśmy uczniów z różnych grup wiekowych, o różnych poziomach wiedzy matematycznej. Nasze doświadczenia pokazują, że samodzielne wykonywanie doświadczeń matematycznych ma niewiarygodnie silny wpływ na uczniowski stosunek do matematyki.

DOŚWIADCZENIE I ROZUMIENIE

Dodatkową zachętą do stosowania metody porównawczej jest krótki czas oczekiwania na interesujące i wymagające podejmowania decyzji momenty. W naszych książkach o geometrii porównawczej (Lénárt, 1996), (Rybak, Lénárt, 2013) stosujemy metodę problemową do rozpatrywania każdego z tematów. Schemat uczniowskiej pracy składa się z następujących etapów:

- Sformułowanie problemu.
- Skonstruuj na płaszczyźnie.
- Zbadaj na płaszczyźnie.
- Jak myślisz – jak to będzie na sferze?
- Skonstruuj na sferze.
- Zbadaj na sferze.
- Porównaj wyniki swoich badań na płaszczyźnie i na sferze. Wyciągnij wnioski.

Dwa dziesięciolecia doświadczeń pokazały, że taka struktura aktywności uczniów jest dobra zarówno dla uczniów, jak i nauczycieli, ponieważ umożliwia odkrywanie własności figur w dwóch systemach geometrycznych jednocześnie. Ponadto pomaga uczniom stawać się bardziej aktywnymi i twórczymi.

„PRZESZKODY"

Jest ich wiele, ale częściej mówią o nich nauczyciele niż uczniowie. Oto kilka najczęściej wymienianych:

- „Geometria jest zastosowaniem teorii przekształceń. Jako taka, nie zasługuje na wiele uwagi."
- „Sam nie uczyłem się dużo geometrii, nieeuklidesowej jeszcze mniej – jak mogę jej uczyć?"
- „Nie można uczyć geometrii sferycznej uczniów, którzy z trudem mogą nauczyć się twierdzenia Pitagorasa na płaszczyźnie."
- „Geometria wymaga takiej twórczości, której przeciętny uczeń nie posiada. Ona jest tylko dla bardzo zdolnych studentów."
- (*Wielka przeszkoda*) „To może być dobry temat, ale, niestety, *nie mam czasu na to*! Program jest tak przeładowany; uczniowie muszą przygotować się do egzaminów."

Dwie uwagi do akapitów '*Pitagoras*' i '*Nie mam czasu!*'

Odnośnie twierdzenia Pitagorasa, pytanie zasadnicze brzmi: Co rozumiemy przez znajomość twierdzenia Pitagorasa? Czy wyrecytowanie przez ucznia formułki „a kwadrat plus b kwadrat..." gwarantuje właściwe zastosowanie twierdzenia w dowolnej sytuacji? Czy uczniowie *lubią* je? Czy doceniają jego wagę i elegancję? Pytamy naszych uczniów: „Czy twierdzenie Pitagorasa jest prawdziwe na sferze? O czym ono jest? Czy może być ono po prostu przeniesione na sferę? Jak to zbadać?" Te pytania zmieniają recytację tekstu twierdzenia w prowokującą myślenie grę pomiędzy dwoma systemami geometrycznymi.

Jeśli chodzi o ograniczenia czasowe, to według nas mamy czas na to, na co chcemy go mieć. Wszystko zależy od tego, jakie cele dydaktyczne stawia sobie nauczyciel. Jeżeli chce nauczyć swoich uczniów recytować definicje, to wszystkie wspomniane aktywności wydają mu się sztuczne i szkodliwe. Jeżeli chce, aby jego uczniowie dogłębnie rozumieli pojęcia, to czas poświęcony geometrii porównawczej nie będzie stracony, ale przyniesie prawdziwy pożytek.

OPIS EKSPERYMENTU

Adrienn Hege, była studentka Eötvös Loránd University w Budapeszcie, Wydziału Edukacji Wczesnoszkolnej, obecnie nauczycielka matematyki, napisała pracę magisterską na temat „Nauczanie pojęcia kąta w szkole podstawowej z wykorzystaniem metody porównawczej w zakresie geometrii na płaszczyźnie i na sferze". W pracy opisała eksperyment przeprowadzony w trzech klasach szóstych (dzieci w wieku 11-12 lat) podczas pięciu kolejnych 45-minutowych lekcji. W eksperymencie wzięły udział trzy klasy:

- klasa A specjalizująca się w matematyce (6 godzin matematyki tygodniowo) – 10 dziewcząt, 12 chłopców;
- klasa B, raczej słaba matematycznie – 12 dziewcząt, 11 chłopców;
- grupa kontrolna Z ('zene' znaczy po węgiersku 'muzyka'), specjalizująca się w muzyce, ta sama liczba lekcji matematyki, co w klasie B – 18 dziewcząt, 7 chłopców.

Adrienn przeprowadziła swoje pięć lekcji z geometrii porównawczej w klasach A i B, nauczycielka w klasie Z przeprowadziła lekcje na temat kątów tylko na płaszczyźnie.

Treści realizowane podczas kolejnych lekcji:

- Lekcja 1: Najprostszy element geometryczny na płaszczyźnie i na sferze. Punkt i linia prosta. Ile prostych można przeprowadzić przez dwa punkty? Wzajemne położenie dwóch prostych. Prostopadłość i równoległość. Punkt i biegun przeciwny.

- Lekcja 2: Mierzenie odległości na płaszczyźnie i na sferze. Przyrządy do mierzenia odległości.
- Lekcja 3: Pojęcie kąta. Wnętrze kata na płaszczyźnie i na sferze. Własności dwukąta sferycznego. Metody mierzenia kątów i przyrządy.. Jednokąt i dwukąt.
- Lekcja 4: Pojęcie trójkąta. Suma kątów wewnętrznych w trójkącie na płaszczyźnie i na sferze.
- Lekcja 5: Niespodzianki na sferze. Pięciokąt (gwiazda pięcioramienna) Napiera.

Po zakończeniu cyklu lekcji wszystkie dzieci pisały tę samą klasówkę z kątów na płaszczyźnie.

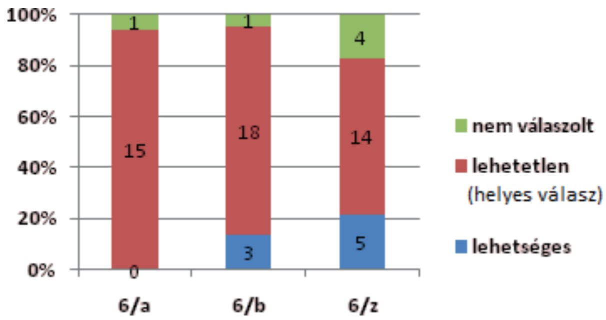
Hipoteza badawcza brzmiała: Porównywanie płaszczyzny i sfery pomaga zrozumieć pojęcia z geometrii na płaszczyźnie i powoduje wzrost zainteresowania matematyką poprzez umożliwienie indywidualnych i twórczych działań.

Nacisk położony był na udoskonalenie procesu przyswajania wiadomości z geometrii euklidesowej (na płaszczyźnie) poprzez badanie dwóch różnych geometrii.

Podczas ostatniej lekcji uczniowie wszystkich klas pisali 40-minutową klasówkę, która składała się z 12 zadań dotyczących wyłącznie geometrii na płaszczyźnie. Z powodu krótkiego czasu trwania testu uczniowie nie musieli rozwiązywać wszystkich zadań, lecz wybierali te, które chcieli i umieli rozwiązać. Oto przykłady zadań:

- Na ramionach kąta odmierz od wierzchołka odcinki o długości 10 cm i połącz tak otrzymane końce odcinków. Zmierz długość nowego odcinka. Czy prawdą jest, że po podwojeniu kąta otrzymamy dwukrotnie dłuższy odcinek *d*?
- Narysuj na płaszczyźnie trzy proste tak, aby pierwsza była prostopadła do drugiej, druga do trzeciej, a trzecia do pierwszej. Czy możesz to zrobić? A z czterema prostymi?
- Dany jest kwadrat i jego przekątne. Jakie są miary kątów w czterech małych trójkątach powstałych wewnątrz kwadratu?
- Czy miara kąta może być określona przez długość odcinka?

Poniżej pokazany jest rozkład odpowiedzi udzielonych do przykładowego zadania: Narysuj na płaszczyźnie trzy proste tak, aby pierwsza była prostopadła do drugiej, druga do trzeciej, a trzecia do pierwszej. Czy możesz to zrobić?



Ryc. 1. Zestawienie procentowe odpowiedzi uczniów [*Źródło:* opracowanie Adrienn Hege]

Zielony kolor oznacza brak odpowiedzi (nem válaszolt), czerwony – prawidłowa odpowiedź (lehetetlen, nie można wykonać takiej konstrukcji), niebieski – nieprawidłowa odpowiedź (lehetsegés). Wyjaśnienia dzieci z klasy B: „Nie można na płaszczyźnie, można w przestrzeni", „Nie można narysować tak trzeciej prostej, ponieważ będą kąty ostre z dwoma prostymi".

Poniższa tabela zawiera zestawienie procentowe wyników pracy kontrolnej w poszczególnych klasach:

Tabela 1. Zestawienie odpowiedzi uczniów trzech klas do zadań z testu

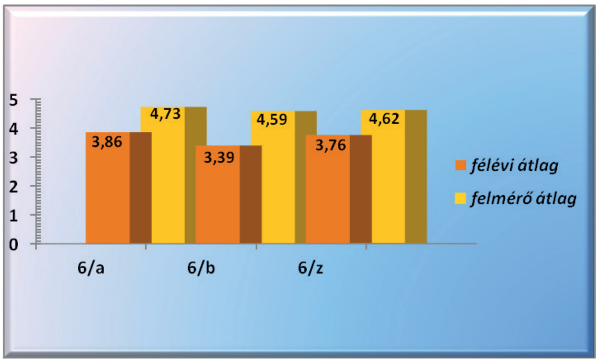
Nr zad		Klasa 6a	Klasa 6b	Klasa 6z
1.	Brak odp. (w %)	0	0	0
	Odp. prawidłowe (w %)	25	50	0
	Odp. nieprawidłowe (w %)	75	50	100
2.	Brak odp. (w %)	0	0	9
	Odp. prawidłowe (w %)	23	32	17
	Odp. nieprawidłowe (w %)	77	68	74
3.	Brak odp. (w %)	19	4	9
	Odp. prawidłowe (w %)	62	48	21
	Odp. nieprawidłowe (w %)	19	48	70
4.	Brak odp. (w %)	Charakter zadania wymagał innego sposobu oceniania niż kategorie złej lub dobrej odpowiedzi.		
	Odp. prawidłowe (w %)			
	Odp. nieprawidłowe (w %)			
5.	Brak odp. (w %)	6	4	17
	Odp. prawidłowe (w %)	94	82	61
	Odp. nieprawidłowe (w %)	0	14	22
6.	Brak odp. (w %)	13	0	17
	Odp. prawidłowe (w %)	87	73	74
	Odp. nieprawidłowe (w %)	0	27	9
7.	Brak odp. (w %)	19	32	22
	Odp. prawidłowe (w %)	56	36	52
	Odp. nieprawidłowe (w %)	25	32	26
8.	Brak odp. (w %)	37	36	43
	Odp. prawidłowe (w %)	19	19	14
	Odp. nieprawidłowe (w %)	44	45	43
9.	Brak odp. (w %)	62	36	67
	Odp. prawidłowe (w %)	19	36	10
	Odp. nieprawidłowe (w %)	19	28	23
10.	Brak odp. (w %)	56	23	52
	Odp. prawidłowe (w %)	31	32	13
	Odp. nieprawidłowe (w %)	13	45	35
11.	Brak odp. (w %)	50	18	23
	Odp. prawidłowe (w %)	6	41	4
	Odp. nieprawidłowe (w %)	44	41	73
12.	Brak odp. (w %)	75	14	35
	Odp. prawidłowe (w %)	0	22	22
	Odp. nieprawidłowe (w %)	25	64	43

Źródło: opracowanie Anna Rybak na podstawie Hege, A. Nauczanie pojęcia kąta w szkole podstawowej z wykorzystaniem metody porównawczej w zakresie geometrii na płaszczyźnie i na sferze (niepubliko-wana praca magisterska)

PODSUMOWANIE EKSPERYMENTU:

Najwięcej pytań pozostawionych bez odpowiedzi było w klasie Z. Być może jedną z przyczyn była dobra atmosfera na lekcjach w klasach A i B oraz radość, jaka towarzyszyła dzieciom w ich odkryciach matematycznych. Być może też uczestniczenie uczniów z klas A i B w zajęciach z geometrii sferycznej bardziej zmotywowało ich do prób rozwiązania wszystkich zadań z testu. Adrienn stwierdziła, że jednym z najważniejszych rezultatów były stosunkowo dobre wyniki klasy B, postrzeganej jako słaba. Różnica pomiędzy oceną semestralną a oceną z testu była największa w klasie B (+1.2), zaś w pozostałych klasach: A (+0.86), Z (+0.87) .

Ilustruje to poniższy diagram.



Ryc. 2. Porównanie średniej ocen półrocznych i średniej ocen z testu [*Źródło:* opracowanie Adrienn Hege]

Na diagramie kolorem pomarańczowym oznaczona jest średnia ocen półrocznych w poszczególnych klasach (félévi átlag), zaś żółtym średnia ocen z testu (felmérő átlag).

Ten największy postęp widoczny w klasie B może być dowodem na to, że nowa metoda zaowocowała większą inspiracją i znacząco podniosła wyniki 'słabszej' grupy.

Należy podkreślić, że objęty eksperymentem materiał był dla uczniów nowy, więc na wyniki nie wpłynęła znacząco wiedza z lat poprzednich. Wszystkie dzieci startowały praktycznie z tego samego punktu, więc można wnioskować, że stosunek do matematyki jest kształtowany nie przez brak zdolności dziecka, ale przez brak odpowiednich warunków do jego pozytywnego rozwoju. Na dzieci, które do tej pory rzadko miały okazję przeżyć radość z sukcesu w uczeniu się matematyki, eksperyment geometryczny wpłynął bardzo pozytywnie i zachęcająco.

OPIS DOŚWIADCZEŃ Z NIEEKSPERYMENTALNYCH SZKOLNYCH SYTUACJI

Anna Rybak prowadziła wiele lekcji i warsztatów z uczniami w różnym wieku i nauczycielami, którzy chcieli nauczyć się czegoś nowego z geometrii, używać różnych środków dydaktycznych i doświadczyć nowego stylu uczenia się. Po niektórych z tych lekcji uczniowie odpowiadali na pytania zawarte w ankiecie stanowiącej pracę domową. Poniższa tabela zawiera pytania i najbardziej charakterystyczne odpowiedzi uczniów.

Tabela 2. Zestawienie odpowiedzi uczniów na pytania ankietowe po lekcji z geometrii sferycznej

Pytanie	Odpowiedzi uczniów
Czego dotyczyła lekcja? Co było jej celem?	Lekcja dotyczyła kuli. Jej celem było przybliżenie teorii, wiedzy na temat kuli; O figurach geometrycznych na powierzchni kuli; Lekcja dotyczyła rysowania figur na powierzchni sfery; Powtórzenia wiadomości z ostatnich lekcji; Nie wiem.
Co robiłeś/robiłaś w czasie lekcji? Opisz swoje działania.	Na początku narysowaliśmy na kuli okrąg, później trójkąt i czworokąt z mierzeniem ich kątów i wypisywaliśmy je na tablicy. Na koniec narysowaliśmy kółko na kuli; Na powierzchni kuli rysowaliśmy okręgi, trójkąty, kwadraty, ale się nie dało zrobić kwadratu; W czasie lekcji rysowałem linie i obliczałem kąty; Narysowałam trójkąt na powierzchni kuli i zmierzyłam jego kąty; Rysowałem za pomocą linijki sferycznej różne figury geometryczne; Składałem kule, rysowałem, mierzyłem kąty; Rysowałam figury na powierzchni przestrzennej kuli za pomocą specjalnych przyrządów; Rysowałem trójkąty i kwadraty. Robiłem do nich obliczenia;
Czego nauczyłeś/nauczyłaś się w czasie lekcji?	Że nie da się narysować kwadratu na kuli; Jak się rysuje na kuli; Trójkąt narysowany na powierzchni kuli ma inne właściwości; Jak używać linijki sferycznej; Czegoś o figurach na sferze; Pracować z przyrządami do mierzenia na kuli; O kątach narysowanego trójkąta: 90°, 90°, 90°; Dowiedziałem się, że prosta na kuli to okrąg; W czworokącie suma kątów wynosi 360° na płaszczyźnie, a na sferze ponad 400°. W trójkącie miara kątów wynosi więcej niż 180°; Dużo ciekawych rzeczy dotyczących kuli; Że w trójkącie sferycznym kąty są zawsze większe niż 180°. Że w kwadracie sferycznym kąty też są większe niż na płaszczyźnie (suma kątów); Że nawet na kuli można narysować figury. Na sferze jest więcej stopni niż na płaszczyźnie; Niczego.

Tabela 2. cd.

Co Twoim zdaniem było w lekcji dobre?	Rysowanie na kuli; Rysowanie i dobra zabawa; Zdobywanie wiedzy; Wolna lekcja. Ciekawa lekcja; Zabawa. Nie trzeba było nic obliczać; Trzy kąty trójkąta o 90º; Linijka. Kątomierz. Cyrkiel; Praca przy pomocy kuli to zabawa; Ciekawe. Nowe informacje. Nowe narzędzia; Miła atmosfera; Dowiedziałam się ciekawych informacji, rzeczy. Pierwszy raz pracowałam z takimi przyrządami. Lekcja była ciekawa i pouczająca; Nauka połączona z zabawą; Rysowanie figur i ich obliczanie; Wszystko; Nic.
Co Twoim zdaniem było w lekcji złe?	Kule się rozpadały; Za krótka lekcja; Problem z włożeniem połowy kuli; Brudne ręce; Nudna lekcja.
Gdyby lekcja na ten temat miała być przeprowadzona ponownie, co chciałbyś / chciałabyś w niej zmienić?	Na pytanie o propozycje zmian w lekcji uczniowie nie odpowiadali lub odpowiadali, że nic nie chcieliby zmienić.

Źródło: opracowanie własne Anna Rybak

Uwagi prowadzącej zajęcia:

- Podczas lekcji zastosowana była czynnościowa strategia nauczania matematyki. Uczniowie wykonywali czynności konkretne (pracowali z realnymi przedmiotami), wyobrażeniowe (korzystali z wykonanych rysunków, które były wyobrażeniem figur geometrycznych) i abstrakcyjne (wykonywali obliczenia, wyciągali wnioski, określając własności figur na sferze). Korzystali z reprezentacji enaktywnych (kula i jej powierzchnia), ikonicznych (wykonane rysunki) i symbolicznych (opis w języku słowno-symbolicznym np. prostej sferycznej).
- Podczas lekcji zastosowane zostało podejście konstruktywistyczne: wiedzę o własnościach figur na sferze skonstruowali sami uczniowie. Oczywiste jest, że podczas takich lekcji uczniowie muszą być inspirowani do wnioskowania przez nauczyciela, który stawia problemy i zadaje pytania ukierunkowujące.
- Podczas lekcji wykorzystana bya metoda porównawcza, która polega na jednoczesnym badaniu i porównywaniu obiektów w dwóch

systemach (w tym przypadku w dwóch systemach geometrycznych).

• Zostały przeprowadzone trzy kolejne lekcje na ten temat, tego samego dnia, w trzech klasach trzecich gimnazjum z oddziałami integracyjnymi. Wszyscy uczniowie (niezależnie od swoich właściwości intelektualnych i dysfunkcji) pracowali manualnie, wykonywali rysunki i pomiary. Dyskusja prowadzona była z całą klasą.

Wnioski płynące z obserwacji uczniów podczas lekcji i analizy ich wypowiedzi:

• Możliwe jest wprowadzenie treści z zakresu geometrii sferycznej do codziennego nauczania matematyki, bez zaburzania codziennej pracy.

• Obserwacja pracy uczniów i analiza ich wypowiedzi wskazują, że możliwość samodzielnego badania figur jest dla nich atrakcyjna, zaś metoda czynnościowa czyni lekcję „lżejszą", inną. Jest traktowana jako zabawa. Uczniowie cenią naukę przez zabawę.

• Jednocześnie analiza wypowiedzi uczniów wskazuje na „dwojaki" sposób zwracania przez nich uwagi na cele lekcji, główne czynności wykonywane podczas lekcji i efekty: dla niektórych uczniów są to czynności manualne (rysowałem, nauczyłem się posługiwać się przyrządami), dla innych również czynności myślowe (obliczałem, nauczyłem się czegoś o figurach na powierzchni kuli).

• Uczniowie wypowiadają się często nieporadnie, język matematyczny wymaga u nich kształcenia.

• Uczniowie chcą pracować z przyrządami. Chcą wykonywać czynności konkretne!

• Atmosfera dyskusji jest przez uczniów dobrze odbierana.

• Podstawowa wiedza z zakresu geometrii sferycznej (dziedziny uznawanej w wielu środowiskach za trudną, wręcz akademicką) jest możliwa do skonstruowania przez uczniów z przeciętnej klasy, na zwyczajnej lekcji, w ciągu 45 minut.

OPIS NASZYCH DOŚWIADCZEŃ Z FESTIWALI NAUKI, PIKNIKÓW NAUKOWYCH ITP., Z PRACY Z LUDŹMI W RÓŻNYM WIEKU, WYKONUJĄCYMI RÓŻNE ZAWODY

Nasze doświadczenia z wystąpień na publicznych imprezach popularyzujących naukę (Festiwale Nauki, Pikniki Naukowe, imprezy w Muzeach Nauki) pokazują, że ta dziedzina nauki jest interesująca dla wszystkich i stanowi intelektualne wyzwanie. Dzieci bardzo lubią pracować na modelu sfery. Często wykrzykują: „Ja tworzę!". Co więcej, nawet dorośli członkowie rodzin angażują się w tę zabawę, chociaż początkowo niechętnie zatrzymują się ze swoimi rozentuzjazmowanymi dziećmi i pytają: „Po co się tutaj zatrzymywać? To jest matematyka, to jest śmiertelnie nudne!". Naprawdę dodaje otuchy nam, prezenterom, patrzenie, jak oni stopniowo zapalają się i jak zmieniają się z cierpiętników w uważnych słuchaczy, a w rezultacie na koniec przyznają: „Nigdy nie myślałem, że geometria może być dla mnie taka fajna. Gdybym tylko mógł kiedyś uczyć się w szkole w ten sposób…"

PODSUMOWANIE

Jesteśmy przekonani, że poza nauczaniem użytecznych i koniecznych wzorów i algorytmów, głównym zadaniem szkolnej matematyki jest przełamywanie barier obojętności lub wręcz wrogości pomiędzy ogółem społeczeństwa a dziedziną matematyki; budowanie obrazu matematyki jako ciepłej, przyjaznej, dającej radość działalności, pełnej artystycznego i poetyckiego piękna, do jakiego ludzki umysł jest zdolny. „Uczniowie nie są naczyniami, które trzeba napełnić, ale raczej lampami, które mają zostać zapalone." – powiedział Plutarch (Plutarch, 110). Wzniecić iskrę zainteresowania w naszych uczniach, dać im wiarę w siebie, niezależne myślenia, zaufanie do własnych możliwości twórczych – to jest największe wyzwanie dla nas, nauczycieli.

BIBLIOGRAFIA

Akinsola, M. K., & Olowojaiye, F. B. (2008). Teacher instructional methods and student attitudes towards mathematics in: International Electronic Journal of Mathematics Education, 3(1)

Beilock, S. L. (2010). Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement, in: Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 107 Institute of Educational Research, Nauczyciele i matematyka, (2015). Retrieved from: (http://www.ibe.edu.pl/pl/o-instytucie/aktualnosci/528-nauczyciele-i-matematyka)

Czerska, A. (2015). How to avoid losing mathematical talents Retrieved from: (http://cudownedziecko.pl/jak-nie-zgubic-matematycznych-talentow/):

Gruszczyk-Kolczyńska, E. (2012). O dzieciach matematycznie uzdolnionych. Książka dla rodziców i nauczycieli, Warszawa: Nowa Era

Hackett, G., & Betz, N.E. (1989). An exploration of the mathematics self efficacy/mathematics performance correspondence. In: Journal for Research in Mathematics Education, 20, pp. 261-273.

Hardy, G. H. (1940) . A Mathematician's Apology, Cambridge: Cambridge University Press

Hege, A. (2011). A szög fogalmának vizsgálata általános iskolában a sík- és gömbgeometria összehasonlító módszerével (Nauczanie pojęcia kąta w szkole podstawowej z wykorzystaniem metody porównawczej w zakresie geometrii na płaszczyźnie i na sferze). Praca magisterska (w języku węgierskim)

Lénárt, I. (1996). Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere. Key Curriculum Press, Berkeley

Newbill, P. L. (2005). Instructional Strategies to Improve Women's Attitudes toward Science, Dissertation Retrieved from (https://theses.lib.vt.edu/theses/available/etd-04192005-151412/unrestricted/Newbilldissertation.pdf)

Pajares, F., & Graham, L., (1999). Self-efficacy, motivation constructs, and mathematics performance of entering middle school students. In: Contemporary Educational Psychology, 24, pp. 124-139.

Pajares, F., & Kranzler, J. (1995). Self-efficacy beliefs and general mental ability in mathematical problem-solving. In: Contemporary Educational Psychology, 20, pp. 426-443.

Pajares, F., & Miller, M. D. (1994). Role of self-efficacy and self-concept beliefs in mathematical problem solving: A path analysis. In: Journal of Educational Psychology, 86, pp. 193-203,

Plutarch (around 110-120), Moralia, On Listening to Lectures, Ossolineum, Wrocław 1954

Report "Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies" (2011). Retrieved from: (http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/132en.pdf)

Report1 Sprawozdanie z egzaminu gimnazjalnego przeprowadzonego w 2015 roku w woj. Podlaskim (2015). Retrieved from:(http://www.oke.lomza.pl/images/pliki/gimnazjum/wyniki/2015/sprawozdanie/sprawozdanie_gim_podl_2015.pdf)

Report2 Sprawozdanie z egzaminu maturalnego z matematyki przeprowadzonego w 2015 roku w woj. Podlaskim (2015). Retrieved from: http://www.oke.lomza.pl/images/pliki/matura/wyniki/2015/sprawozdanie/21.09.2015_matematyka_podlaskie.pdf

Russell, B. (1903). The Principles of Mathematics. Cambridge University Press, London

Rybak, A. & Lénárt, I. (2013) Trzy światy geometrii (Three worlds of geometry). Wydawnictwo Dla Szkoły, Bielsko-Biała (in Polish)

Zientek, L.R., Yetkiner, Z.E., & Thompson, B., (2010). Characterizing the mathematics anxiety literature using confidence intervals as a literature review mechanism in: Journal of Educational Research, 103.

Anna Rybak

University of Bialystok, Poland,
Faculty of Mathematics and Informatics
e-mail: a.rybak@uwb.edu.pl

István Lénárt

ELTE University,
Budapest, Hungary
e-mail: ilenart@cs.elte.hu

COMPARATIVE GEOMETRY: BREAK BARRIERS BETWEEN MATH AND MATH PHOBICS

ABSTRACT:

We discuss some features of school mathematics as important factors of math phobia among the public. We try to highlight the difference between the two images of math, as viewed by math phobics and math enthusiasts like us. We give proposals to deal with the problem in mathematics education, and a more detailed description of a method called Comparative geometry on the plane and on the sphere. We add some concrete experiences and experiments in and out of the classroom. The target audience of the present paper is not confined to the experts of mathematics teaching, but to the educational community as a whole.

Keywords: math education, math phobia, motivation, attitudes towards mathematics, comparative geometry.