Studia Psychologiczne. t. 55 (2017), z. 3, s. 42–52
PL ISSN 0081-685X
DOI: 10.2478/V1067-010-0168-2

Sylwia Kania,

Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski
sylwia.kania@us.edu.pl

ZARYS KONCEPCJI BADANIA ROZUMIENIA I WYKORZYSTYWANIA STRUKTURY LOGICZNEJ MATEMATYCZNEJ WYPOWIEDZI

Proces nauczania matematyki niesie za sobą wiele trudności związanych z rozumieniem pewnych pojęć, twierdzeń i faktów najczęściej zapisanych przy użyciu odpowiedniej symboliki. Poprawne rozumienie zawartych w zapisie matematycznym informacji jak i logicznej struktury samego zapisu ma zasadnicze znaczenie na drodze matematycznego rozwoju. Błędne pojmowanie logicznej struktury zdania matematycznego może być przyczyną niepowodzeń w trakcie nauki i może prowadzić do mylnego spojrzenia na omawiane zagadnienia.
Artykuł przedstawia zarys pewnej koncepcji badania rozumienia struktury logicznej matematycznej wypowiedzi i sposób uwzględniania jej w procesie korekty fałszywych stwierdzeń matematycznych. Skonstruowane testy pozwalają wyodrębnić preferencje uczniów i studentów – merytoryczne bądź logiczne podejście do problemu. Miejsce dokonania korekty przez badanego w danym zdaniu świadczy o jego wyborach – czy interesuje go tylko merytoryczna treść składowych zdań prostych, czy bierze on pod uwagę również strukturę logiczną całego zdania złożonego.

Słowa kluczowe: dydaktyka matematyki, logika matematyczna, rachunek zdań, lektura tekstu matematycznego

Ucząc się matematyki uruchamiamy nieustannie różne mechanizmy aktywności matematycznej, specyficznej intelektualnej działalności, której podjęcie warunkuje właściwe rozumienie tego, czym jest matematyka. Dlatego bardzo ważne jest odpowiednie sterowanie kierunkiem tej aktywności poprzez, między innymi wyznaczanie sobie racjonalnych poleceń i rozwiązywanie dobrze wybranych zadań i problemów matematycznych. Niezbędna jest tutaj pomoc nauczyciela, przewodnika, który nie nakazuje jednej drogi, ale określa kierunek dążeń, który nie prowadzi za rękę, ale pozwala czasem zbłądzić po to, by dostrzec źródło pomyłek i nie dopuszczać do ponownych porażek w podobnych sytuacjach. Zadaniem i celem nauczyciela powinno być ciągłe rozwijanie twórczej postawy ucznia, która poprowadzi go nie tylko na intelektualne wyżyny matematycznej twórczości, ale także umożliwi mu racjonalne działanie w innych dziedzinach, pozornie nie związanych z matematyką.

Operatywny charakter języka matematycznego możemy traktować jako naturalną konsekwencję aktywności matematycznej, wówczas znalezienie optimum precyzji językowej staje się celem ogólnym, celem samym w sobie. Język matematyki jest połączeniem specyficznej symboliki, odpowiedniej terminologii oraz języka potocznego, dlatego ważne jest wypracowanie optymalnych dla nauczania form języka matematyki elementarnej oraz poszukiwanie najbardziej efektywnych metod kształcenia matematycznego języka ucznia (Krygowska, 1977). Nauczyciel musi być świadomy, że *przejście od języka konkretów do języka symboli, od słów do znaków stanowi dla ucznia zasadniczą trudność* (Krygowska 2003, s. 29). Do wspomnianych trudności autorka zalicza również wieloznaczność symbolu oraz psychologiczną trudność pogodzenia automatycznego i świadomego posługiwania się symbolami. Umiejętność posługiwania się językiem naturalnym uczeń posiadł od wczesnego dzieciństwa i doskonali ją nadal w procesach permanentnej edukacji. Język matematyki jest dla ucznia językiem sztucznym, który mimo ścisłej zależności od języka naturalnego oraz mimo faktu, iż wywodzi się częściowo z języka potocznego, jest pozbawiony wszelkich emocji i uczuć (Kania, 2015).

W literaturze spotykamy dwie różne koncepcje nauczania elementów logiki matematycznej, w szczególności w odniesieniu do elementów rachunku zdań. Pierwsza z nich polega na dwustopniowym wprowadzaniu elementów logiki do nauczania, początkowo niejawnie, aczkolwiek świadomie ukazywać uczniom pewne prawidłowości w matematycznych rozumowaniach, żeby później dokonać formalnej syntezy oraz uogólnić zdobyte wcześniej doświadczenia i intuicje w ramach kursu logiki matematycznej. Druga koncepcja polega na nieformalnym wykształceniu u uczniów poprawnych nawyków językowych i zasad rozumowania. Niezależnie od wyboru koncepcji nauczania elementów logiki matematycznej, a w szczególności podstawowych elementów rachunku zdań, nauczyciel musi sobie uzmysłowić, że używanie formalnego języka matematyki, operatywne stosowanie odpowiedniej symboliki stanowi podstawę zdobywania wiedzy matematycznej.

Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 maja 2014r. w sprawie kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (tak samo jak wersje poprzednie z 27 sierpnia 2012r., 23 grudnia 2008r.) nie uwzględniają żadnych elementów logiki matematycznej jako obowiązkowych treści programowych. Można więc przyjąć, że obecne nauczanie szkolne opowiada się za drugą z wymienionych wcześniej koncepcji, czyli za nieformalnym, a nawet okazyjnym wprowadzaniem uczniów w odpowiednią symbolikę rachunku zdań i poprawne rozumienie czytanego tekstu matematycznego. Kształcenie logiczne uczniów powinno się opierać na „zdrowym rozsądku" i to właśnie „logika zdrowego rozsądku" powinna wytyczać granice, których przekroczenie okazałoby się zgubne i krzywdzące dla ucznia. Przykładowo, jeśli formalnie za prawdziwe uznajemy zdanie

jeżeli 2 + 2 jest równe 5, to szpinak rośnie na drzewach,

to czujemy, że są to jakieś „manowce logiki", manowce zdrowego rozsądku (Szurek, 2006). Należy jednak pamiętać, że w wielu sytuacjach naturalne intuicje logiczne uczniów zasadniczo różnią się od ich funkcjonowania w matematyce. Ponadto, jak pokazują badania (Nowecki 1978; Klakla i in. 1992, Kania 2013) nie ma automatycznego transferu wiedzy logicznej ze znanych uczniowi, bliskich mu sytuacji codziennych na sposób matematycznego myślenia, a nawet na jakiekolwiek rozumowania abstrakcyjne.

Inne badania (Klakla, Nawrocki 1999; Kania 2012) zwracają uwagę, iż pewne trudności i nieścisłości w rozumieniu pojęć i praw logicznych mogą stać się powodem niepowodzeń w studiowaniu matematyki. Wspomniane badania stały się inspiracją do powstania mojej rozprawy doktorskiej (Kania, 2015). Punktem wyjścia obrane zostało pytanie czy uczniowie (szkół ponadgimnazjalnych) i studenci potrafią dostrzec i zwrócić uwagę na strukturę logiczną matematycznej wypowiedzi oraz uwzględnić ja podczas lektury tekstu matematycznego. Do pełnego, dogłębnego matematycznego poznania niezbędna jest zarówno umiejętność poprawnej weryfikacji merytorycznej treści rozważanych faktów matematycznych, jak również rozumienie łączących je relacji logicznych. Próba odpowiedzi na pytanie czy te dwie kategorie umiejętności są równie ważne w procesie nauczania – uczenia się matematyki oraz jakie ewentualne czynniki decydują o przewadze jednej z nich stały się podłożem do zaprojektowania oraz przeprowadzenia szeregu badań. Skonstruowane testy miały za zadanie sprawdzić, czy w ocenie prawdziwości danego stwierdzenia matematycznego uczniowie lub studenci kierują się przede wszystkim zdobytą dotychczas wiedzą matematyczną, czy rozważając prawdziwość złożonej wypowiedzi uwzględniają również jej strukturę logiczną. Na potrzeby weryfikacji hipotez zawartych w rozprawie rozwiązanych zostało 2538 różnych sprawdzianów przez 616 różnych uczniów lub studentów.

Przytoczę kilka wniosków z rozprawy, które chciałabym rozwinąć i częściowo zmodyfikować w niniejszym artykule:

1. Preferencje logiczne uczniów w procesie korekty fałszywych stwierdzeń matematycznych maleją wraz z upływem czasu od realizacji elementów logiki na lekcjach matematyki w danej klasie.

2. Preferencje wyborów uczniów i studentów w procesie korekty fałszywych stwierdzeń matematycznych zależą od struktury logicznej rozważanego zdania.

3. Sposób zapisu danego stwierdzenia (symboliczny bądź słowny) oraz wzajemna zależność między zdaniami składowymi danej wypowiedzi ma wpływ na rodzaj preferencji wyborów uczniów i studentów w procesie korekty fałszywych stwierdzeń matematycznych.

4. Brak wiedzy na temat wartości logicznej analizowanych zdań ma wpływ na liczbę popełnianych przez uczniów błędów.

W dalszej części opracowania skupię się jedynie na teście, którego wyniki nie były w pełni satysfakcjonujące i badania są obecnie kontynuowane. Wyniki i obserwacje nowych badań, które nasunęły się po ich przeprowadzeniu są częściowo prezentowane w niniejszej pracy.

KONSTRUKCJA I ANALIZA TESTU

Rozwiązywanie skonstruowanych przeze mnie testów polegało na takim wprowadzaniu poprawek w fałszywych, złożonych zdaniach matematycznych, aby przekształcić je w zdania prawdziwe. Miejsce dokonania korekty w danym stwierdzeniu kwalifikowało preferencje badanych – merytoryczne bądź logiczne. Badani otrzymywali ten sam test trzy razy: za pierwszym razem mieli całkowitą swobodę wyboru, mogli dokonać poprawki w dowolnym, wybranym przez siebie miejscu w zdaniu (**wybór spontaniczny**). Za drugim razem badani mieli do wyboru cztery zaznaczone miejsca i zobligowani byli do wprowadzenia poprawki w jednym (lub kilku) z tych zaznaczonych miejsc (**wybór częściowo ograniczony**). W dwóch przypadkach taka korekta była kwalifikowana jako merytoryczna, w pozostałych dwóch jako logiczna. W trzeciej wersji testu zaznaczone były już tylko dwa miejsca (**wybór wymuszony**), jedno, przemawiające za preferencjami logicznymi, a drugie za merytorycznymi.

Poniżej prezentuję wszystkie trzy wersje omawianego testu:

Sprawdzian W_1

Poniżej znajduje się **8 fałszywych** zdań matematycznych. W każdym z nich dokonaj **minimalnej liczby korekt** tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe. Korekty możesz dokonać w dowolnym miejscu (miejscach) w zdaniu.

1. Wielomian $W(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ jest stopnia 2 i wielomian ten po rozłożeniu na czynniki liniowe ma postać $W(x) = (x-1)(x-2)(x+2)$.

2. Dziedziną wyrażenia $W(x) = \frac{x-2}{x+3}$ jest zbiór $R \setminus \{2\}$ lub miejscem zerowym tego wyrażenia jest liczba -3.

3. Jeżeli liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 6x + 2x + 2$, to zachodzi równość $W(0) = 1$.

4. Miejsca zerowe wyrażenia

$$W(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{(x-1(x+2)}$$

to liczby $\{-2,-1,1,2\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dziedziną tego wyrażenia jest zbiór $R \setminus \{-2,1\}$.

5. Trójkąt o bokach długości 3,4,5 jest prostokątny i przekątna prostokąta o bokach 3, 5 ma długość 4.

6. Przekątna kwadratu o boku długości 2 ma długość $2\sqrt{3}$ lub pole kwadratu o boku 2 wynosi $2\sqrt{3}$.

7. Jeżeli wysokość trójkąta równobocznego o boku 6 ma długość $3\sqrt{3}$, to pole tego trójkąta wyraża się wzorem $P = 6 \cdot 3\sqrt{3}$.

8. Przekątne rombu nie przecinają się pod kątem prostym wtedy i tylko wtedy, gdy pole rombu wyraża się wzorem $P = \frac{fe}{2}$, gdzie e, f – długości przekątnych rombu.

Sprawdzian W$_2$
Poniżej znajduje się **8 fałszywych** zdań matematycznych. W każdym z nich dokonaj **minimalnej liczby korekt** tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe. Korekty możesz dokonać w wyznaczonym miejscu (miejscach) w zdaniu.

1. Wielomian $W(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ jest stopnia 2 i wielomian ten po rozłożeniu na czynniki liniowe ma postać $W(x) = (x-1)(x-2)(x+2)$.

2. Dziedziną wyrażenia $W(x) = \frac{x-2}{x+3}$ jest zbiór $R \setminus \{2\}$ lub miejscem zerowym tego wyrażenia jest liczba -3.

3. Jeżeli liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 6x + 2x + 2$, to zachodzi równość $W(0) = 1$.

4. Miejsca zerowe wyrażenia

$$W(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{(x-1(x+2)}$$

to liczby $\{-2,-1,1,2\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dziedziną tego wyrażenia jest zbiór $R \setminus \{-2,1\}$.

5. Trójkąt o bokach długości 3,4,5 jest prostokątny i przekątna prostokąta o bokach 3, 5 ma długość 4.

6. Przekątna kwadratu o boku długości 2 ma długość $2\sqrt{3}$ lub pole kwadratu o boku 2 wynosi $2\sqrt{3}$.

7. Jeżeli wysokość trójkąta równobocznego o boku 6 ma długość $3\sqrt{3}$, to pole tego trójkąta wyraża się wzorem $P = 6 \cdot 3\sqrt{3}$.

8. Przekątne rombu nie przecinają się pod kątem prostym wtedy i tylko wtedy, gdy pole rombu wyraża się wzorem $P = \frac{fe}{2}$, gdzie e, f – długości przekątnych rombu

Sprawdzian W$_3$
Poniżej znajduje się **8 fałszywych** zdań matematycznych. W każdym z nich dokonaj **minimalnej liczby korekt** tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe. Korekty możesz dokonać w wyznaczonym miejscu (miejscach) w zdaniu.

1. Wielomian $W(x)=x^3-x^2-4x+4$ jest stopnia 2 i wielomian ten po rozłożeniu na czynniki liniowe ma postać $W(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$

2. Dziedziną wyrażenia $W(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$ jest zbiór $R\setminus\{2\}$ lub miejscem zerowym tego wyrażenia jest liczba -3.

3. Jeżeli liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=x^3-6x+2x+2$, to zachodzi równość $W(0)=1$.

4. Miejsca zerowe wyrażenia

$$W(x)=\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{(x-1(x+2)}$$

to liczby $\{-2,-1,1,2\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dziedziną tego wyrażenia jest zbiór $R\setminus\{-2,1\}$.

5. Trójkąt o bokach długości 3,4,5 jest prostokątny i przekątna prostokąta o bokach 3, 5 ma długość 4.

6. Przekątna kwadratu o boku długości 2 ma długość $2\sqrt{3}$ lub pole kwadratu o boku 2 wynosi $2\sqrt{3}$.

7. Jeżeli wysokość trójkąta równobocznego o boku 6 ma długość $3\sqrt{3}$, to pole tego trójkąta wyraża się wzorem $P=6\cdot 3\sqrt{3}$.

8. Przekątne rombu nie przecinają się pod kątem prostym wtedy i tylko wtedy, gdy pole rombu wyraża się wzorem $P=\dfrac{fe}{2}$, gdzie e, f – długości przekątnych rombu

Uczniowie i studenci, którzy rozwiązywali powyższe testy, a ich wyniki zostały dogłębnie przeanalizowane i omówione w mojej rozprawie doktorskiej, przed przystąpieniem do przytoczonego testu rozwiązywali szereg innych testów podobnego typu, choć skupiających się na innych aspektach i obrazujących inne założenia oraz cele. Znajomość zagadnienia, a raczej formy i charakteru testu (trzy wersje wyboru) mogła jednak wpłynąć na ich obiektywizm, a ich preferencje mogłyby się różnić, gdyby nie rozwiązywali wcześniej testów, w których w kolejnych wersjach wyróżnione były miejsca wyboru dokonania korekty. Obserwacje po przeprowadzonych wówczas badaniach, po rozwiązaniu pierwszego testu, pokazują, że zaznaczając kilka miejsc do wyboru badani zaczynają analizować dane stwierdzenie pod zupełnie innym kątem. Zastanawiają się, w jaki sposób można dokonać korekty w każdym z tych miejsc i wybierali, w ich ocenie „najciekawsze". Przystępując do przedstawionego Testu W, badani zdawali więc sobie sprawę z tego, że za chwilę otrzymają kolejne wersje i już przy rozwiązywaniu sprawdzianu o wyborze spontanicznym analizowali wiele możliwości i szukali dla siebie „najciekawszej", co mogło mieć wpływ na ich rzeczywiste preferencje - w odniesieniu do preferencji opisanych i klasyfikowanych w tych konkretnych badaniach, nie są to w żaden sposób znormalizowane preferencje, których rozróżnienie odbywałoby się na zasadach pewnej taksonomii.

Struktura logiczna Testu W różni się od poprzednich (omawianych i analizowanych w rozprawie) przede wszystkim tym, że pominięto tutaj symbole spójników logicznych i zastąpiono je słownym zapisem. Stwierdzenia są również tak skonstruowane, że konkretny spójnik łączy zdania ściśle ze sobą powiązane, co sprawia, że budowa logiczna całego stwierdzenia jest „merytorycznie spójna". Zostało zmienione również polecenie, zadaniem badanych jest tutaj dokonanie **minimalnej liczby korekt**, a nie dokładnie jednej korekty, jak to było w innych testach. W każdym zdaniu dalej możliwe jest wprowadzenie dokładnie jednej poprawki, aby otrzymać zdanie prawdziwe, jednak tak sformułowane polecenie daje badanym pewną swobodę i nie wymusza szukania dokładnie jednej konkretnej drogi rozwiązania.

Test typu W ma za zadanie sprawdzić czy w zdaniu zapisanym bez użycia odpowiedniej symboliki rachunku zdań badany w ogóle dostrzega i bierze pod uwagę budowę logiczną wypowiedzi. Test weryfikuje czy brak symboliki logicznej powoduje skupienie uwagi badanej osoby tylko na merytorycznej treści rozważanego stwierdzenia, bez zwracania uwagi na budowę logiczna, a nawet na strukturę tego zdania – czy jest to koniunkcja, alternatywa, implikacja czy równoważność.

Merytoryczną zawartość rozważanego testu stanowią elementarne zagadnienia działów matematyki szkolnej i ocena ich prawdziwości nie powinna badanym uczniom czy studentom sprawiać trudności.

W celu zobrazowania możliwości dokonania korekt logicznego bądź merytorycznego typu rozważmy dla przykładu zdanie 2 rozpatrywanego testu:

Dziedziną wyrażenia $W(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$ *jest zbiór* $R \setminus \{2\}$ *lub miejscem zerowym tego wyrażenia jest liczba* -3.

Za korektę logicznego typu uznawane będzie tutaj zaprzeczenie zdaniu fałszywemu, czyli skreślenie słowa *jest* i zapisanie *nie jest* w jednym lub drugim zdaniu składowym tej alternatywy (korekta logiczna II rodzaju). Poprawką typu logicznego będzie nazwana również korekta polegająca na odpowiedniej zamianie spójnika logicznego, w tym wypadku słowa *lub* na *wtedy i tylko wtedy* (równoważność), bądź rozłączny spójnik *Jeżeli…, to…* (implikacja). Tego typu korekty nazywałam korektami logicznymi III rodzaju. Ponadto w zdaniach zapisanych za pomocą implikacji lub równoważności możliwe jest jeszcze dokonanie korekty logicznej polegającej na zmianie wartości logicznej zdania prawdziwego na fałszywą – zamiana implikacji postaci $1 \Rightarrow 0$ na $0 \Rightarrow 0$ lub równoważności postaci $0 \Leftrightarrow 1$ lub $1 \Leftrightarrow 0$ na $0 \Leftrightarrow 0$. Taka korekta nazywana jest korektą I rodzaju. Wszystkie pozostałe poprawki będą uznawane za korekty typu merytorycznego.

Ogólne wyniki testu typu W

W rozprawie doktorskiej sformułowałam hipotezę, że badani uczniowie i studenci (badaniu zostało poddanych 55 uczniów i 60 studentów) potrafią dostrzec budowę logiczną wypowiedzi nawet wówczas, gdy jej struktura logiczna nie jest wyraźnie podkreślona odpowiednim symbolem spójnika. W szczególności wskazanie miejsca, w którym istnieje możliwość dokonania korekty logicznej w danym zdaniu powoduje uruchomienie przyswojonego wcześniej „aparatu logicznego" i wprowadzenie poprawnej zmiany tego typu. Ogólne wyniki po rozwiązaniu testu W przedstawiały się następująco:

Tabela 1. Zestawienie rodzajów korekt dokonywanych przez uczniów i studentów

Grupa badanych	Wersja wyboru	Merytoryczne	Logiczne	Błąd	Brak
uczniowie	spontaniczny	39%	38%	17%	6%
	ograniczony	43%	41%	13%	3%
	wymuszony	29%	57%	13%	1%
studenci	spontaniczny	56%	42%	2%	0%
	ograniczony	51%	45%	4%	0%
	wymuszony	46%	54%	1%	0%

Warto zauważyć, że liczba preferencji logicznych i merytorycznych u uczniów jest prawie taka sama w teście o wyborze spontanicznym, u studentów również pojawiła się duża liczba korekt logicznego typu w sprawdzianie o wyborze spontanicznym. Analiza tych wyników potęgowała przekonanie, że wysoka liczba korekt logicznych jest prawdopodobnie wynikiem zapamiętania polecenia z poprzednich badań. Stąd pomysł przeprowadzenia tego samego testu na grupie uczniów i studentów, którzy nigdy nie rozwiązywali testów podobnego typu.

Do badań wybrałam grupę 42 uczniów Liceum Ogólnokształcącego w Sławkowie, gdzie pracuję jako nauczyciel matematyki. Uczniowie uczęszczali do dwóch różnych klas, 22 uczniów do klasy II, 20 uczniów do klasy III, część z nich, zarówno w jednej, jak i drugiej klasie, realizowała matematykę tylko na poziomie podstawowym, a część z nich uczyła się matematyki w zakresie rozszerzonym. Do badań przystąpiło również 18 studentów matematyki Uniwersytetu Śląskiego, gdzie pracuję na stanowisku naukowo dydaktycznym. Z wybranymi studentami spotykałam się na zajęciach kursowych, było to 13 studentów I roku studiów II stopnia oraz 5 studentów II roku studiów II stopnia, wszyscy studiowali matematykę na specjalności nauczycielskiej.

Preferencje badanych rozkładają się następująco:

Pierwsze spostrzeżenie, które nasuwa się od razu po przestudiowaniu powyższej tabeli, dotyczy wzrostu liczby korekt typu logicznego w kolejnych wersjach wyboru rozwiązywanego testu. Można stąd wnioskować (podpierając się również Tabelą 1), że wyróżnienie miejsca, w którym można dokonać poprawki logicznego typu skłoniło wielu badanych uczniów i studentów do zmiany preferencji. Powyższy wniosek potwierdziły również **rozmowy indywidualne**, które przeprowadziłam z wybranymi uczniami po zakończeniu badań. Uczniowie wypowiadali się, że po otrzymaniu testu (w pierwszej wersji wyboru) i omówieniu polecenia nie mieli zupełnie pojęcia, czego dane badania dotyczą, co mają sprawdzać oraz w jaki sposób wziąć się za rozwiązywanie. Pomimo zapewnień nauczyciela, że nie istnieje tylko jeden sposób rozwiązania, a wprost przeciwnie, jest wiele dróg postępowania, ani że nie ma lepszych i gorszych rozwiązań i powinni dokonywać korekty po swojemu, wielu uczniów głośno próbowało wyrazić swoje myśli komentarzem typu: *które miejsce wybrać, żeby było dobrze*. Uczniowie przyznawali (głównie uczniowie klasy III), że polecenie było dla nich nowe, nieznane, więc powodowało pewną dozę niepewności oraz strachu przed pomyłką. Wzbudziło to we mnie niepokój, że realizacja podstawy programowej skupia się bardzo na rozwiązywaniu zadań standardowych, a dążenie do uzyskania jak najlepszych wyników na

Tabela 2. Zestawienie rodzajów dokonywanych korekt przez uczniów i studentów, którzy nie rozwiązywali testów podobnego typu

Grupa badanych	Wersja wyboru	Merytoryczne	Logiczne	Błąd	Brak
uczniowie	spontaniczny	66%	10%	18%	6%
	ograniczony	60%	30%	4%	6%
	wymuszony	52%	40%	4%	4%
studenci	spontaniczny	82%	17%	1%	0%
	ograniczony	64%	34%	2%	0%
	wymuszony	40%	58%	2%	0%

egzaminie maturalnym usypia w uczniach te aktywności matematyczne, które najbardziej rozwijają abstrakcyjne myślenie kształtując ich twórczą postawę. Używając określenia „zadań standardowych" mam na myśli zmechanizowane rozwiązywanie zadań powtórkowych przed egzaminem maturalnym, gdzie bardzo często (niestety) liczy się bardziej opanowanie poprawnej metody rozwiązania, niż przejście przez wszystkie, twórcze etapy dojścia do tego rozwiązania, które kształtują matematyczną osobowość ucznia i każdy z tych etapów jest niezbędny na drodze matematycznego rozwoju. Powyższa dygresja jest tylko sugestią do bardziej wnikliwego spojrzenia na korelację realizacji podstawy programowej, a realizacji zakładanych celów kształcenia, nie ma jednak związku z zagadnieniami poruszanymi w niniejszej pracy.

Rozmowy indywidualne pokazały również, że informacja o fałszywości wszystkich zdań testu częściowo sugerowała im, a nawet w pewien sposób nakazywała szukać błędów w tych zdaniach, tym samym skupiać się jedynie na merytorycznej treści zdań składowych. Dopiero wyróżnione miejsca w zdaniu skłoniły badanych do refleksji nad innymi możliwościami, w szczególności rozmowy indywidualne pokazały, że wyróżnienie słowa *jest* było najbardziej kontrowersyjne i powodowało dostrzeżenie budowy logicznej całej wypowiedzi. Uczniowie wielokrotnie podczas rozwiązywania testu o wyborze częściowo ograniczonym i wymuszonym zwracali uwagę na fakt, iż nie mogą przecież słowa *jest* zamienić na *nie jest*, jeżeli nie są do końca pewni, czy w rzeczywistości *jest czy nie jest*, a więc czy dane zdanie składowe jest fałszywe, żeby móc zmienić jego wartość logiczną na prawdziwą, Sytuacja odwrotna, czyli zamiana wartości logicznej z prawdy na fałsz, nie była na tym etapie w ogóle brana pod uwagę mimo, że w każdej implikacji i równoważności byłoby to możliwe bez szacowania wartości logicznych zdań składowych. Uczniowie nie zważali na strukturę logiczną wypowiedzi, interesowała ich jedynie zawartość merytoryczna tych zdań. Dopiero głębsza analiza rozważanego stwierdzenia, często sterowana przez nauczyciela, pozwoliła spojrzeć na poszczególne stwierdzenia jako na koniunkcję, alternatywę, implikację czy równoważność dwóch zdań prostych i odnieść się do ich budowy logicznej. Studenci nie potrzebowali takiego nakierowania ze strony prowadzącego badania, sami potrafili uzmysłowić sobie patrząc na wyróżnione miejsca, w których można było dokonać korekty logicznego typu, że wystarczy czasami wziąć pod uwagę tylko budowę danego stwierdzenia, żeby dokonać poprawnej korekty, bez zastanawiania się nad znaczeniem poszczególnych zdań składowych. Studenci matematyki studiów II stopnia są jednak zdecydowanie lepiej przygotowani do wszelkiego typu rozumowań abstrakcyjnych, więc powyższa obserwacja jest tego naturalną konsekwencją.

Warto również zauważyć, że w przypadku uczniów, w teście o wyborze spontanicznym, pojawiło się wiele błędnych korekt, 18% wszystkich poprawek zawierało błędy. Przyczyną pojawiających się błędów były czasami braki dostatecznej wiedzy merytorycznej i dokonywane poprawki nie zmieniały wartości logicznej zdania prostego, dalej pozostawało ono fałszywe. Czasami uczniowie popełniali błędy przy próbie dokonania korekty logicznego typu III rodzaju, czyli w sposób niewłaściwy zamieniali spójnik logiczny i w tym przypadku zdanie fałszywe po zmianie spójnika pozostawało dalej fałszywe. Najczęstsze błędy polegały jednak na wprowadzeniu więcej niż jednej korekty, z reguły dwóch. Pomyłki te pojawiały się głównie w zdaniach zapisanych za pomocą alternatywy, uczniowie dokonywali korekt w obu zdaniach prostych zmieniając alternatywę postaci $0 \vee 0$ na alternatywę postaci $1 \vee 1$. Jest to prawdopodobnie konsekwencja niedostrzegania i nieuwzględniania budowy logicznej całej złożonej wypowiedzi, o czym pisałam wcześniej, a zwracania uwagi jedynie na wartość merytoryczną poszczególnych składowych danego stwierdzenia. Obydwa zdania proste fałszywej alternatywy są fałszywe, więc w ocenie ucznia minimalną liczbą korekt, która zmieni wartość logiczną tego stwierdzenia na prawdziwą, jest liczba dwóch poprawek. Już w teście o wyborze częściowo ograniczonym liczba błędnych korekt znacząco maleje, a nawet można powiedzieć, że pomyłki zdarzają się sporadycznie, stanowią zaledwie 4% wszystkich odpowiedzi i wynikają głównie z niedostatków elementarnej wiedzy matematycznej. Naprowadzenie uczniów, poprzez wskazanie kilku miejsc na dokonanie korekty, wzmaga ich poczucie bezpieczeństwa, uczeń czuje się pewniej, gdy wie, gdzie może – lub nawet powinien – dokonać zmiany.

Wspominałam wcześniej, przy okazji omawiania grupy badawczej, że uczniowie wybrani do rozwiązywania testu uczyli się w dwóch różnych klasach (II lub III). Dokonam teraz analizy wyników badań z uwzględnieniem podziału na poszczególne klasy. Należy w tym miejscu dodać, że uczniowie klasy II kilka tygodni wcześniej mieli przeprowadzoną lekcję, na której przypomniane zostały elementy rachunku zdań, w szczególności tabele wartości logicznych dla poszczególnych spójników logicznych. Działanie to było celowe, aby przypomnieć uczniom ten uśpiony aparat logiczny, żeby znali i pamiętali właśnie te elementy rachunku zdań, które w sposób niejawny pomagały interpretować później test rozwiązywany w ramach badań i poniekąd naprowadzać na dostrzeganie logicznej budowy danej wypowiedzi.

Zobaczmy jak kształtowały się preferencje badanych uczniów w poszczególnych klasach. Ograniczę się tylko do przedstawienia wyników w wersji testu o wyborze spontanicznym, wyniki w pozostałych wersjach testu w poszczególnych klasach są zgodne z ogólnymi wynikami.

Tabela 3. Zestawienie rodzajów korekt dokonywanych przez uczniów w poszczególnych klasach.

Grupa badanych	Klasa	Merytoryczne	Logiczne	Błąd	Brak
uczniowie	II	54%	18%	20%	8%
	III	78%	6%	12%	4%

Na podstawie otrzymanych wyników można potwierdzić hipotezę, że

Preferencje logiczne uczniów w procesie korekty fałszywych stwierdzeń matematycznych maleją wraz z upływem czasu od realizacji elementów logiki na lekcjach matematyki w danej klasie.

Uczeń, który stosunkowo niedawno zaznajamiany był z podstawowymi pojęciami logiki matematycznej znacznie częściej dostrzega strukturę logiczną rozważanego zdania złożonego niż uczeń, który tematy związane z rachunkiem zdań realizował dawno. Wynika to prawdopodobnie z faktu, iż wiedza, która została w pewnym momencie przyswojona, ale nie jest wykorzystywana zostaje w końcu zapomniana lub staje się martwym narzędziem w „gmachu wiedzy matematycznej".

PODSUMOWANIE

Zadaniem nauczyciela powinno być więc ciągłe odwoływanie się do budowy logicznej wypowiedzi, zwracanie uwagi na poprawne znaczenie spójników logicznych oraz korygowanie uczniowskich niedociągnięć w tym zakresie. Działania te są niezbędne, by wyposażyć uczniów w bardzo ważną umiejętność na drodze matematycznego kształcenia, mianowicie samodzielną lekturę tekstu matematycznego.

Należy jednak pamiętać, że język nauczyciela prowadzącego lekcje, język wykładowcy prowadzącego zajęcia ze studentami, powinien być dostosowany i adekwatny do poziomu intelektualnego odbiorców, powinien uwzględniać ich predyspozycje, stopień matematycznego zaawansowania, a nawet poziom ich zainteresowania przedmiotem. Nauczyciel matematyki, czyli z założenia wykształcony matematyk, często traktuje język matematyki bardzo swobodnie, naturalnie, aczkolwiek świadomie i zatraca się w przekonaniu, że jego jednoznaczne wypowiedzi mogą mieć zupełnie inny od jego wyobrażeń odbiór. Uczeń nie daje sobie sprawy z zasięgu i znaczenia pojęć, którymi w sposób swobodny operuje nauczyciel, nie zauważa kognitywnych powiązań przekazywanych treści, a wypowiadane przez nauczyciela słowa są zostawione bez rzeczowej analizy. Jest to oczywiście jedna z przyczyn zaburzeń komunikacji na lekcji matematyki, ale również, a może przede wszystkim, podstaw tych zaburzeń możemy dopatrywać w zaniedbaniach dotyczących kształcenia logicznego uczniów.

BIBLIOGRAFIA:

Kania S., *Merytoryczne i logiczne preferencje uczniów i studentów w procesie korekty fałszywych stwierdzeń matematycznych,* Rozprawa doktorska, Kraków, 2015

Kania S., *Preferencje dokonywanych przez uczniów wyborów w procesie odkrywania prawdy matematycznej,* Dydaktyka, edukacja i kultura w badaniach młodych naukowców, Instytut naukowo-wydawniczy Maiuscula, Poznań 2013, s.147–163

Kania S., *Czynniki decydujące o preferencjach studentów w procesie korekty fałszywych stwierdzeń,* Młodzi naukowcy dla polskiej nauki cz. VIII, t. I, Creativetime, Kraków 2012, s. 153–164

Klakla M., Klakla M., Nawrocki J., Nowecki B., *Pewna koncepcja badania rozumienia pojęć matematycznych i jej weryfikacja na przykładzie kwantyfikatorów,* Zeszyty Naukowe WSP w Opolu, Mat. XXVIII, 1992, s.181–223

Klakla M., Nawrocki J., *Logical and factual aspects of mathematical truth in teaching of mathematics in technical universities*, Actes de la CIEAEM 50, Neuchaatel, Suisse, 1999, s. 336–340

Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki,* cz. I, WSiP, Warszawa, 1977

Krygowska Z., *O poprawne rozumienie przez uczniów symbolu literowego w nauce algebry,* Przedruk z: Matematyka Nr 4, 1955, *W:* Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, red. J. Żabowski, t. I, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 2003c, s. 27–43

Nowecki B. J., *Badania nad efektywnością kształtowania pojęć twierdzenia i dedukcji u uczniów klas licealnych w zmodernizowanym nauczaniu matematyki,* Wydawnictwo Naukowe WSP w Krakowie, Kraków, 1978

Szurek M., *O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów. Tom 4,* GWO, Gdańsk, 2006

Sylwia Kania

University of Silesia, Institute of Mathematics

sylwia.kania@us.edu.pl

THE SKETCH OF THE IDEA OF THE RESEARCH OF UNDERSTANDING AND USING THE LOGICAL STRUCTURE OF THE MATHEMATICAL STATEMENT.

ABSTRACT

The process of teaching mathematics carries huge difficulties in understanding certain definitions, theorems or facts, which usually are written in adequate symbols. Proper understanding of information included in mathematical notation as well as logical structure of the notation itself is a basic rule of acquirement of mathematical knowledge. Wrong insight into the logical structure of mathematical sentences may be the cause of students failure during their learning and it can provide wrong impression on the studying case.

The article introduces the sketch of the idea of the research about students' understanding of the logical structure of mathematical problems and the way of using that structure in the process of correction false mathematical statements. Presented tests allow to distinguish preferences of the particular student – factual or logical aspects of mathematical truth. Places, where students make a correction in every sentence, tell us a lot about their choices – if they are interested only in factual meaning of the complex mathematical sentence or if they are also interested in logical structure of that sentence. Some results of the research and analysis of those results, as well as the main goal and short characterization of the research itself are presented in the following article.

Keywords: didactics of mathematics, sentencial logic, reading of mathematical text